



TITLE:

電力系統の安定度解析に対するリアプノフ直接法の応用に関する研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

大澤, 靖治

CITATION:

大澤, 靖治. 電力系統の安定度解析に対するリアプノフ直接法の応用に関する研究. 京都大学, 1982, 工学博士

ISSUE DATE:

1982-05-24

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r4713>

RIGHT:

新 制
工
541
京大附図

電力系統の安定度解析に対する リアプノフ直接法の応用に関する研究

昭和56年12月

大 澤 靖 治

電力系統の安定度解析に対する リアプノフ直接法の応用に関する研究

昭和56年12月

大 澤 靖 治

電力系統の安定度解析に対するリアプノフ 直接法の応用に関する研究

内 容 梗 概

本論文は、電力系統の安定度に関する諸問題へのリアプノフ直接法の応用について研究を行ったものである。すなわち、過渡安定度の解析とそのオンライン判別、過渡安定度解析のための系統の等価簡略化、動態安定度の感度解析などに、リアプノフ直接法およびリアプノフ関数を用いた安定度の指標を適用し、新手法の開発、従来手法の改善を行なって、電力系統の安定度解析の高効率化を目指したものである。その概要は以下の通りである。

第1章の緒論では、本研究の意義、目的と研究方法について述べる。

第2章では、エネルギー積分法および拡張されたポポフの定理による3種のリアプノフ関数を例題系統に適用し、それらの特徴について検討するとともに、本論文で一貫して用いるリアプノフ関数を決定した。

第3章では、リアプノフ関数の級数展開を用いて、過渡安定領域の評価を拡大し実際の安定領域に近づける方法を提案し、一機無限大母線系に適用して、安定領域の評価の拡大、限界故障除去時間の評価の改善の度合について検討した。

第4章では、リアプノフ関数を用いた過渡安定度の指標を定義し、これを利用した統計的手法による過渡安定度のオンライン評価法について述べた。さらにこの評価法を用いて、燃料費だけでなく過渡安定度も考慮した発電所間の経済負荷配分について検討した。

第5章では、合着性にもとづく電力系統の等価簡略化のための合着発電機群の判定法として、リアプノフ関数を利用した方法を提案し、計算例として10機系および50機系に適用してその有効性を検討した。

第6章では、動態安定度の解析に対するリアプノフ直接法の応用として、リアプノフ関数にもとづく動態安定度の指標について述べ、この指標を用いた安定度の感度解析を行なった。

第7章 結論では、本研究で得られた結果を要約している。

目 次

第1章 緒 論	1
第2章 リアプノフ関数による電力系統の過渡安定度解析	3
2.1 まえがき	3
2.2 系統動揺方程式	3
2.3 リアプノフ関数	4
2.4 一機無限大母線系統における計算例	5
2.5 モデル10機系統における計算例	7
第3章 リアプノフ関数の級数展開による過渡安定度解析	17
3.1 リアプノフ関数の級数展開による漸近安定領域の評価の拡大	17
3.1.1 方法の原理	17
3.1.2 電力系統の過渡安定度問題への適用	20
3.2 計算例	20
3.3 考 察	22
第4章 統計的手法による過渡安定度のオンライン評価と過渡安定度を考慮した 経済負荷配分へのその応用	25
4.1 統計的手法による過渡安定度のオンライン評価	25
4.1.1 過渡安定度の指標	25
4.1.2 最小二乗法による関数近似	26
4.1.3 計算例	27
4.2 過渡安定度を考慮した経済負荷配分	30
4.2.1 問題の定式化	30
4.2.2 問題の解法	31
4.2.3 計算例	31
4.3 要 約	35
第5章 リアプノフ関数にもとづく過渡安定度解析のための電力系統の等価簡略 化法	36
5.1 リアプノフ関数を用いた縮約可能発電機群の決定	36
5.1.1 決定法の考え方	36

5.1.2	系統動揺方程式とリアプノフ関数	37
5.1.3	決定のアルゴリズム	38
5.2	等価発電機の定数と等価回路	39
5.3	計算結果とその検討	40
5.3.1	10 機系統	40
5.3.2	50 機系統	44
第 6 章	リアプノフ直接法による動態安定度の解析	51
6.1	動態安定度解析のための系統のモデル化	51
6.1.1	同期機	51
6.1.2	AVR と調速機	53
6.1.3	送電線と定インピーダンス負荷	54
6.1.4	微小動揺に対する線形化方程式	55
6.2	リアプノフ直接法による動態安定度の指標	55
6.2.1	状態変数の積分二乗偏差による解析	56
6.2.2	リアプノフ関数による動態安定度の指標	58
6.3	動態安定度の感度解析	62
第 7 章	結 論	64
謝 辞		65
付 録		67
参考文献		107

第1章 緒 論

電力系統の安定度は古くからの問題であり、その研究の端緒は同期機が使用されるようになった当初にさかのぼることができる。最近の電力系統においては、環境問題や用地問題から大容量の発電所が負荷中心から離れて建設されるため送電系統は長距離、大容量となり、また、経済面より発電機等のリアクタンスも増大しているので、安定度は悪くなる傾向にある。一方、電力需要の増大とともに電力系統は大規模化、複雑化しており、このような系統の安定度解析を行なうために効率のよい手法を確立することが重要な課題となっている。

安定度解析のために現在主として用いられているのは、各種制御系の効果等を考慮したシミュレーション手法であって、これより各同期機の動揺曲線等、系統の安定度に関する知見が得られる。一方、リアプノフ直接法は多機系統の安定判別を高速に行ないうるという利点を有しており、従来多くの研究がなされてきたが、広く実用されるまでには至っていない。これは従来のリアプノフ関数による安定判別が控え目であること、最近の応答の速い制御系の効果を考慮することが困難であることが主たる原因として挙げられる。これらの欠点を克服せんがための研究が続けられているが、最も信頼性の高い安定度解析法としては今後もシミュレーション法が第一に使用されるものと思われる。電力系統へのリアプノフ関数の応用としては、安定判別のためよりもむしろリアプノフ関数を用いた安定度の指標として用いられるものと考えられている。

本論文はリアプノフ直接法を電力系統の安定度解析に適用して解析の高効率化をめざしたものであって、直接法による安定判別および関連問題へのリアプノフ関数の応用について研究を行なったものである。すなわち、まずエネルギー積分法および拡張されたポポフの定理を用いて構成される3種のリアプノフ関数を例題系統に適用してそれらの特徴について検討する。また、リアプノフ関数の級数展開を用いて安定領域の評価を拡大し実際の安定領域に近づけるとともに、安定判別の精度を改善する方法を提案している。

リアプノフ関数による安定度解析の一つの利点は、安定性の測度が得られることである。本論文では、リアプノフ関数を用いた過渡安定度の指標を定義し、これを利用した統計的手法による過渡安定度のオンライン評価法を提案する。さらに、合着性にもとづく電力系統の等価簡略化のための合着発電機群の判定法として、リアプノフ関数を利用した方法を提案している。これによって、系統全体のシミュレーションを長時間行なうことなく合着発電機群を知ることができ、同時に等価発電機、等価回路の定数を決定することを目指している。最後に、動態安

定度の解析に対するリアプノフ直接法の応用として、リアプノフ関数にもとづく動態安定度の指標について述べ、その指標を用いた安定度の感度解析について一機無限大母線系を例題として検討している。

本論文は以上のような安定度の諸問題に対してリアプノフ関数（直接法）を応用し、新手法の開発や従来手法の改善を検討したものであって、電力系統の安定度解析の高効率化に寄与せんとするものである。

第2章 リアプノフ関数による電力系統の過渡安定度解析

2.1 ま え が き

電力系統の過渡安定度は、系統微分方程式を数値的に解く方法（シミュレーション法）によって一般に解析が行なわれているが、リアプノフ直接法による解析においては、最終の回路変化時までのみ微分方程式を解き、その時のリアプノフ関数の値によって以後の計算をすることなく安定判別を行なう（付録A参照）。

リアプノフ関数を導出する方法としては、1) エネルギー積分法、2) ズボフ（Zubov）の方法、3) ポポフ（Popov）の方法、4) 試行錯誤法、などが一般に用いられるが、AVR、調速機等の制御系を考慮しない固有過渡安定度の解析に関しては、上のいずれの方法も類似の形のリアプノフ関数を与えることが知られている¹⁾。

本章では、エネルギー積分法とポポフの方法より構成されるリアプノフ関数を、一機無限大母線系統および10機系統の過渡安定判別に適用し、それぞれのリアプノフ関数の性質について検討を行ない、本文で用いるリアプノフ関数の特性を明らかにする。

2.2 系統動揺方程式

過渡安定度解析のための電力系統の表現において、発電機および負荷に関する次の仮定を行なう。

- (1) 同期機は、過渡リアクタンス背後の一定電圧で表現できる。つまり、過渡動揺中界磁に鎖交する磁束は一定で、電機子反作用やAVRの効果は無視できる。
- (2) 制動トルクはすべり速度に比例する。
- (3) 機械入力是一定とする。つまり、調速機の効果は無視できる。
- (4) 同期機の突極性は無視できる。
- (5) 同期機の慣性定数は一定とみなせる。
- (6) 負荷は定インピーダンスで表現できる。

以上の仮定のもとで、 n 機電力系統は次の微分方程式で表わされる。

$$\begin{aligned} M_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} + D_i \frac{d\delta_i}{dt} = P_{mi} - \sum_{j=1}^n E_i E_j [G_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) \\ + B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)] \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで,

M_i : 第 i 発電機の慣性定数

D_i : 第 i 発電機の制動係数

E_i : 第 i 発電機の内部誘起電圧

P_{mi} : 第 i 発電機への機械入力

$G_{ij} + jB_{ij}$: 第 i 発電機と第 j 発電機の内部誘起電圧間の伝達アドミタンス

δ_i : 同期速度で回転する基準軸から測った第 i 発電機の回転子角

t : 時間

(2.1) 式は伝達アドミタンスを実数部と虚数部ではなく絶対値と角度で表現して、次式のようにも書ける。(付録B参照)

$$M_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} + D_i \frac{d \delta_i}{dt} = \sum_{j=1}^n E_i E_j Y_{ij} [\sin(\delta_i^s - \delta_j^s + \theta_{ij}) - \sin(\delta_i - \delta_j + \theta_{ij})] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

ただし

$$Y_{ij} \angle \phi_{ij} = Y_{ji} \angle \phi_{ji} = G_{ij} + jB_{ij}$$

$$\theta_{ij} = \pi/2 - \phi_{ij}$$

δ_i^s : δ_i の安定平衡点における値

2.3 リアプノフ関数

(2.1) 式のエネルギー積分より得られるリアプノフ関数は次式となる。(付録B)

$$\begin{aligned} V_1 = & \sum_{i>k} M_i M_k \omega_{ik}^2 / 2 \\ & - \sum_{i>k} (M_k P_{mi} - M_i P_{mk} - M_k E_i^2 G_{ii} + M_i E_k^2 G_{kk}) (\delta_{ik} - \delta_{ik}^s) \\ & - M_T \sum_{i>k} E_i E_k B_{ki} (\cos \delta_{ik} - \cos \delta_{ik}^s) \end{aligned} \quad (V.1)$$

ただし

$$\omega_{ik} = \dot{\delta}_{ik} = \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_k$$

$$M_T = \sum_{i=1}^n M_i$$

δ_{ik}^s : $\delta_{ik} = \delta_i - \delta_k$ の安定平衡点における値

また、(2.2)式のエネルギー積分より求まるリアプノフ関数は(付録B)

$$V_2 = \sum_{i>k} [M_i M_k \omega_{ik}^2 / 2 - M_T E_i E_k B_{ik} (\cos \delta_{ik} - \cos \delta_{ik}^s) - (\delta_{ik} - \delta_{ik}^s) M_T E_i E_k B_{ik} \sin \delta_{ik}^s] \quad (V.2)$$

以上のリアプノフ関数(V.1), (V.2)は, 制動を無視することによって求められるが, ポポフの定理を用いると, 次式のような制動項の効果を含むリアプノフ関数が得られる。²⁾ (付録C)

$$V_3 = \frac{1}{2} \omega' \mathcal{E} \omega + \frac{a}{4} (\delta' \mathcal{E} \omega + \omega' \mathcal{E} \delta) + \frac{a^2}{4} \delta' \mathcal{E} \delta + \int_0^{Cx} f'(\sigma) d\sigma \quad (V.3)$$

2.4 一機無限大母線系統における計算例

次式であらわされる一機無限大母線系統³⁾の安定領域を, 前節で導びいたリアプノフ関数を用いて求める。

$$M \frac{d^2 \delta}{dt^2} + D \frac{d\delta}{dt} = P_m - P_e \sin \delta \quad (2.3)$$

M: 慣性定数 (= 0.0138 p.u.)

D: 制動係数 (= 0.0285 p.u.)

δ : 無限大母線電圧からの発電機回転子の進み角

P_m : 機械入力

P_e : 最大電気出力 (= 3.02 p.u.)

運転状態は

$$P_m = 0.91 \text{ p.u.}, \quad \delta^s = 0.306 \text{ rad.}$$

を考える。エネルギー積分によるリアプノフ関数は

$$V(\delta, \omega) = M \omega^2 / 2 - P_m (\delta - \delta^s) - P_e (\cos \delta - \cos \delta^s) \quad (2.4)$$

ω : 発電機角速度の偏差

このリアプノフ関数のしきい値は, 不安定平衡点($\pi - \delta^s, 0$)における値より

$$V_{cr} = V(\pi - \delta^s, 0) = 3.46 \quad (2.5)$$

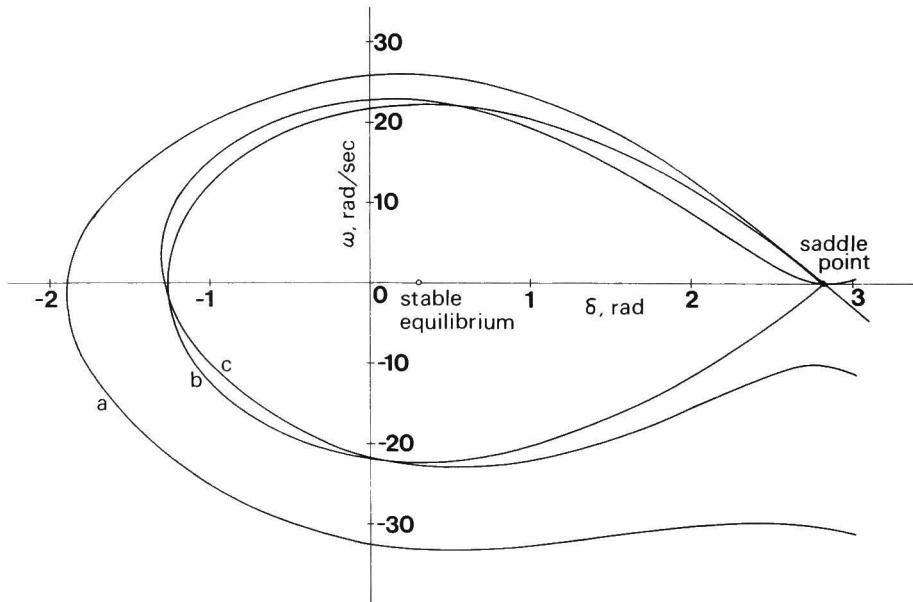
(2.4), (2.5) 式より、 $\delta - \omega$ 平面におけるリアプノフ関数による安定領域は次式となる。

$$M\omega^2/2 - P_m \delta - P_e \cos \delta = 0.299 \quad (2.6)$$

一方、拡張されたポポフの定理より導かれるリアプノフ関数 (V.3) は、この一機無限大母線系統の場合次式となる。

$$V = M\omega^2/2 + D\omega(\delta - \delta^s)/2 + D^2(\delta - \delta^s)^2/4M \\ - P_m(\delta - \delta^s) - P_e(\cos \delta - \cos \delta^s) \quad (2.7)$$

これはエネルギー積分によるリアプノフ関数 (2.4) 式に第2項、第3項を加えたものであり、制動を無視した場合 ($D=0$) は両者は一致する。第2.1図に、(a) 系統微分方程式を解いて求めた実際の安定領域、(b) リアプノフ関数 (2.4) によって求まる安定領域、(c) リアプノフ関数 (2.7) による安定領域を示す。(c) では制動の効果が考慮されているので安定領域の形状は実際のそれに近く、また、第2,4象限においてはより実際の安定領域に近い評価を与える。しかし、過渡安定度において通常問題となる第1象限においては、逆にエネルギー積分によるリアプノフ関数の方が実際に近い評価を与える。したがって、本文の以下の章においては、エネルギー積分によるリアプノフ関数を用いる。



第2.1図 一機無限大母線系の (a) 安定領域、(b) 安定領域の評価 (エネルギー積分)、(c) 安定領域の評価 (ポポフの定理)

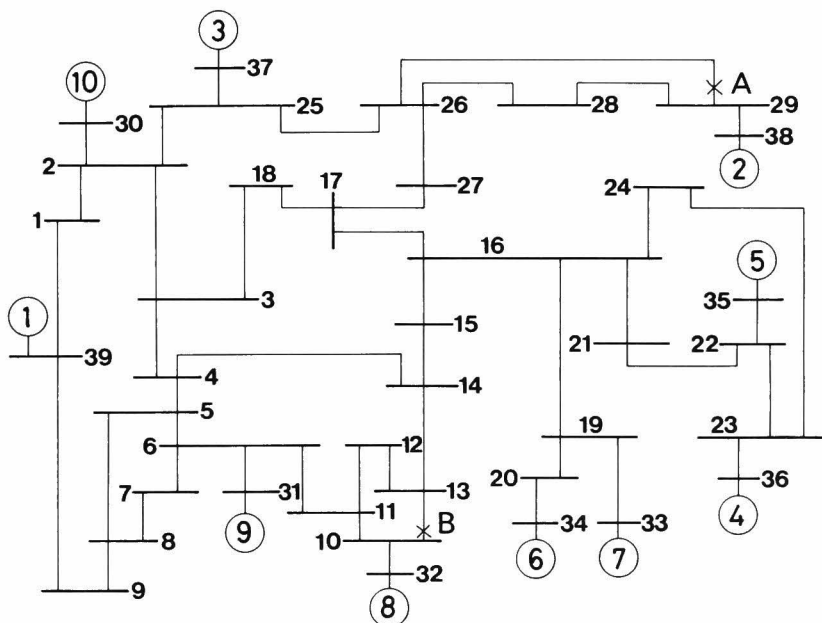
2.5 モデル 10 機系統における計算例

ここでは多機系統に対する計算例として、10 機系統の過渡安定度解析を 2.3 節のエネルギー積分によるリアプノフ関数 V_1 および V_2 を用いて行ない、両者の結果の比較を行なう。

例題系統は New England Test System と呼ばれる 10 機系統であり⁴⁾ 第 2.2 図に系統構成を、第 2.1、2.2、2.3 表に線路定数、母線データおよび発電機定数をそれぞれ示す。

第 2.2 表の母線データは全負荷における値を示し、以後の解析においてはこれを基準にして軽負荷時の値を導く。じょう乱としては第 2.2 図の A 点（母線至近の送電線路上）における三相短絡を仮定し、線路両端を同時に開放することによって除去されるものとする。再投入は行なわないとした。

安定限界を決定するためのリアプノフ関数のしきい値としては、付録 A に述べたように、リアプノフ直接法が厳密な意味での安定のための十分条件となるためには、すべての不安定平衡点におけるリアプノフ関数の値のうちの最小値を選ぶ必要がある。しかし、限界しゃ断時間よりもわずかに大きい時間でしゃ断した時に脱調する発電機がわかれば、その脱調モードに対応する不安定平衡点におけるリアプノフ関数の値をしきい値とすることにより、第 1 動揺に対す



第 2.2 図 例題 10 機系統

第 2.1 表 例題 10 機系統の線路定数
(100 MVA ベースの単位法)

母 線	母 線	抵 抗	リアクタンス	対地サセプトランス	タップ比
1	2	0.0035	0.0411	0.6987	1.0
1	39	0.0010	0.0250	0.7500	1.0
2	3	0.0013	0.0151	0.2572	1.0
2	25	0.0070	0.0086	0.1460	1.0
3	4	0.0013	0.0213	0.2214	1.0
3	18	0.0011	0.0133	0.2138	1.0
4	5	0.0008	0.0126	0.1342	1.0
4	14	0.0008	0.0129	0.1382	1.0
5	6	0.0002	0.0026	0.0434	1.0
5	8	0.0008	0.0112	0.1476	1.0
6	7	0.0006	0.0092	0.1130	1.0
6	11	0.0007	0.0082	0.1389	1.0
7	8	0.0004	0.0046	0.0780	1.0
8	9	0.0023	0.0363	0.3804	1.0
9	39	0.0010	0.0250	1.2000	1.0
10	11	0.0004	0.0043	0.0729	1.0
10	13	0.0004	0.0043	0.0729	1.0
13	14	0.0009	0.0101	0.1723	1.0
14	15	0.0018	0.0217	0.3660	1.0
15	16	0.0009	0.0094	0.1710	1.0
16	17	0.0007	0.0089	0.1342	1.0
16	19	0.0016	0.0195	0.3040	1.0
16	21	0.0008	0.0135	0.2548	1.0
16	24	0.0003	0.0059	0.0680	1.0
17	18	0.0007	0.0082	0.1319	1.0
17	27	0.0013	0.0173	0.3216	1.0
21	22	0.0008	0.0140	0.2565	1.0
22	23	0.0006	0.0096	0.1846	1.0
23	24	0.0022	0.0350	0.3610	1.0
25	26	0.0032	0.0323	0.5130	1.0
26	27	0.0014	0.0147	0.2396	1.0
26	28	0.0043	0.0474	0.7802	1.0
26	29	0.0057	0.0625	1.0290	1.0
28	29	0.0014	0.0151	0.2490	1.0
12	11	0.0016	0.0435	0.0	1.006
12	13	0.0016	0.0435	0.0	1.006
6	31	0.0000	0.0250	0.0	1.07
10	32	0.0000	0.0200	0.0	1.07
19	33	0.0007	0.0142	0.0	1.07
20	34	0.0009	0.0180	0.0	1.009
22	35	0.0000	0.0143	0.0	1.025
23	36	0.0005	0.0272	0.0	1.0
25	37	0.0006	0.0232	0.0	1.025
2	30	0.0000	0.0181	0.0	1.025
29	38	0.0008	0.0156	0.0	1.025
19	20	0.0007	0.0138	0.0	1.06

第 2.2 表 例題 10 機系統の母線データ

母線番号	電 圧	負荷電力 (MW)	負荷電力 (MVar)	発電力 (MW)	発電力 (MVar)
1	1.0475	0	0	0	0
2	1.0489	0	0	0	0
3	1.0304	322	2.4	0	0
4	1.0038	500	184	0	0
5	1.0050	0	0	0	0
6	1.0074	0	0	0	0
7	0.9967	233.8	84	0	0
8	0.9957	522	176.6	0	0
9	1.0281	0	0	0	0
10	1.0170	0	0	0	0
11	1.0125	0	0	0	0
12	1.0000	8.5	88	0	0
13	1.0142	0	0	0	0
14	1.0117	0	0	0	0
15	1.0158	320	153	0	0
16	1.0322	329.4	32.3	0	0
17	1.0339	0	0	0	0
18	1.0313	158	30	0	0
19	1.0500	0	0	0	0
20	0.9909	680	103	0	0
21	1.0321	274	115	0	0
22	1.0500	0	0	0	0
23	1.0450	247.5	84.6	0	0
24	1.0377	308.6	-92.2	0	0
25	1.0575	224	47.2	0	0
26	1.0521	139	17	0	0
27	1.0379	281	75.5	0	0
28	1.0501	206	27.6	0	0
29	1.0500	283.5	26.9	0	0
30	1.0475	0	0	250	145.1
31	0.9820	9.2	4.6	563.3	205.5
32	0.9831	0	0	650	205.7
33	0.9972	0	0	632	109.1
34	1.0123	0	0	508	167
35	1.0493	0	0	650	211.3
36	1.0635	0	0	560	100.5
37	1.0278	0	0	540	0.7
38	1.0265	0	0	830	22.8
39	1.0300	1104	250	1000	88

第 2.3 表 例題 10 機系統の発電機定数
(100MVA ベースの単位法)

発電機番号	H	x'_d	D
1	500.0	0.006	10.0
2	34.5	0.057	14.0
3	24.3	0.057	9.0
4	26.4	0.049	8.0
5	34.8	0.050	10.0
6	26.0	0.132	3.0
7	28.6	0.0436	10.0
8	35.8	0.0531	10.0
9	30.3	0.0697	9.75
10	42.0	0.031	4.0

る過渡安定度を判定することができる^{5), 6)} (付録 D 参照) 第 1 動揺に対して安定であれば、その後はリアプノフ関数の構成において無視した制動項や調速機の効果によって第 2 動揺以後で脱調することはほとんどないので、第 1 動揺に対する安定判別は限界しゃ断時間の評価が実際の値に近くなり、現実的な方法であるといえる。本計算例においては故障点至近の第 2 発電機が脱調するので、この脱調モードに対応する不安定平衡点におけるリアプノフ関数の値をしきい値として用いる。

系統運転状態としては、すべての負荷と発電機出力の大きさを第 2.2 表に示した全負荷の値の 0.5 倍から 1.0 倍までの 0.1 倍きざみとし、6 つの状態を設定した。この設定法は実際の系統の運転状態を正しく模擬しているとはいえないが、ここでは負荷の大きさがリアプノフ関数による安定判別に及ぼす影響を調べるためにこのような運転状態を仮定する。つまり、負荷母線消去後のアドミタンス行列の伝達コンダクタンスの大きさが、伝達コンダクタンスを無視して構成したリアプノフ関数による安定判別に及ぼす影響について検討する。第 2.4 表は 0.2 倍負荷、0.5 倍負荷、0.7 倍負荷、全負荷の 4 つの負荷状態に対する故障除去後のアドミタンス行列の偏角を示す。負荷が大きいほど偏角が小さく、伝達コンダクタンスの伝達サセプタンスに対する比が大きいことがわかる。送電線、発電機、変圧器等のインピーダンスの抵抗分がリアクタンスと比較して無視できても、負荷母線を消去した後の伝達コンダクタンスは無視できない場合がある。⁷⁾

第 2.5 表に、各負荷状態に対する限界しゃ断時間について、微分方程式を解いて求めた実際の値、 V_1 , V_2 を用いて評価した値を示す。重負荷になるほど実際の限界しゃ断時間は小さくなるが、 V_1 による評価が常に悲観的な結果となり、その度合が負荷とともに大きくなるのに対し

第 2.4 表 発電機内部誘起電圧よりみたアドミタンス行列の偏角 (rad)

(a) 0.2 倍負荷

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1.42	1.59	1.62	1.53	1.53	1.52	1.54	1.53	1.52	1.52
2		-1.48	1.43	1.49	1.49	1.49	1.50	1.51	1.51	1.57
3			-1.51	1.51	1.50	1.49	1.51	1.54	1.54	1.60
4				-1.54	1.52	1.49	1.51	1.50	1.49	1.51
5					-1.55	1.49	1.50	1.49	1.48	1.50
6						-1.55	1.50	1.48	1.47	1.49
7							-1.53	1.50	1.49	1.51
8								-1.55	1.50	1.49
9									-1.55	1.48
10										-1.54

(b) 0.5 倍負荷

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1.29	1.42	1.54	1.37	1.36	1.32	1.36	1.42	1.42	1.45
2		-1.43	1.32	1.32	1.31	1.28	1.32	1.32	1.31	1.45
3			-1.51	1.36	1.36	1.32	1.36	1.41	1.41	1.55
4				-1.53	1.47	1.35	1.39	1.36	1.33	1.37
5					-1.53	1.35	1.39	1.35	1.33	1.36
6						-1.53	1.42	1.31	1.29	1.33
7							-1.50	1.35	1.33	1.36
8								-1.54	1.43	1.39
9									-1.54	1.36
10										-1.53

(c) 0.7 倍負荷

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1.22	1.31	1.49	1.25	1.25	1.19	1.25	1.35	1.36	1.40
2		-1.39	1.24	1.20	1.19	1.14	1.19	1.20	1.18	1.37
3			-1.50	1.27	1.27	1.21	1.26	1.33	1.32	1.53
4				-1.52	1.44	1.26	1.32	1.26	1.23	1.27
5					-1.52	1.26	1.32	1.26	1.23	1.27
6						-1.53	1.37	1.20	1.17	1.21
7							-1.49	1.26	1.23	1.27
8								-1.53	1.39	1.29
9									-1.54	1.28
10										-1.52

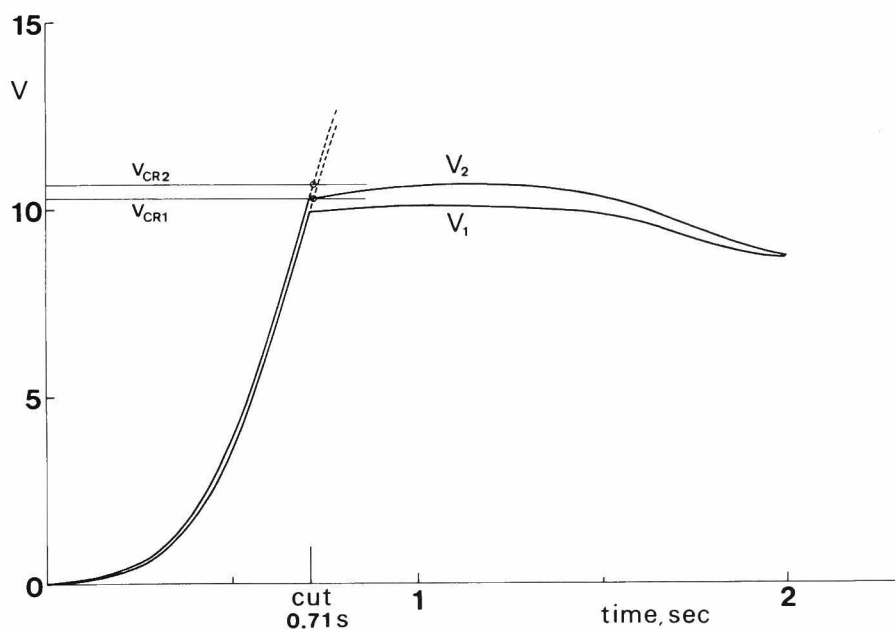
(d) 全 負 荷

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1.14	1.15	1.41	1.09	1.09	1.00	1.08	1.25	1.26	1.34
2		-1.35	1.12	1.01	1.01	0.93	1.01	1.01	0.98	1.25
3			-1.50	1.13	1.13	1.04	1.12	1.21	1.19	1.49
4				-1.51	1.39	1.13	1.21	1.12	1.08	1.14
5					-1.51	1.13	1.21	1.12	1.08	1.14
6						-1.52	1.30	1.04	0.99	1.05
7							-1.47	1.12	1.07	1.13
8								-1.52	1.33	1.18
9									-1.53	1.16
10										-1.51

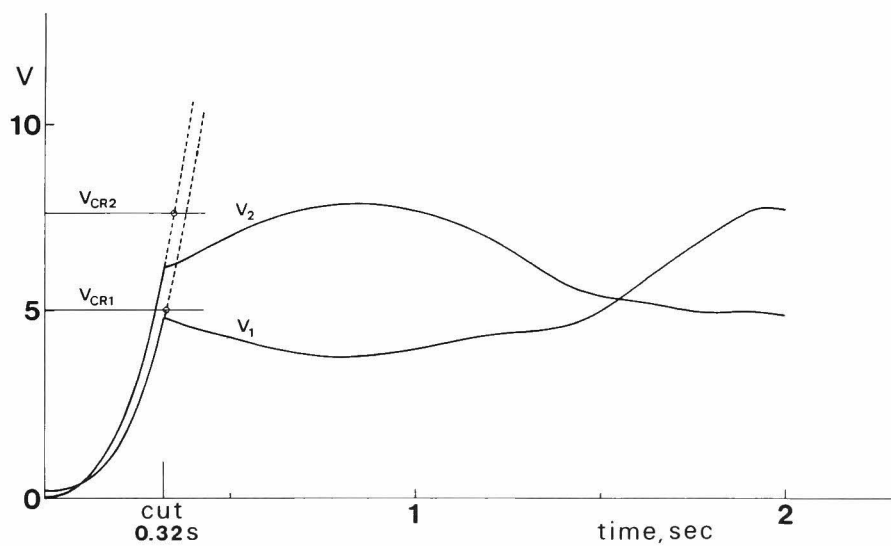
第 2.5 表 各負荷状態における限界故障除去時間とその評価

負荷の大きさ (×全負荷)	実際の限界故障 除去時間 (秒)	V_1 による評価 (秒)	V_2 による評価 (秒)
0.5	0.32	0.32	0.34
0.6	0.25	0.24	0.28
0.7	0.20	0.13	0.23
0.8	0.15	—	0.19
0.9	0.12	—	0.16
1.0	0.08	—	0.12

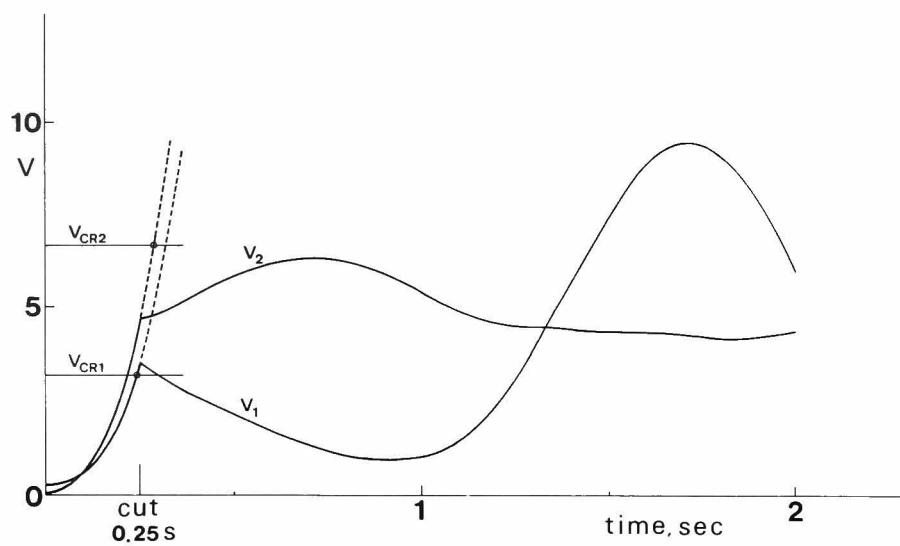
て、 V_2 による評価では常に楽観的な結果となり、楽観の度合も負荷とともに大きくなる。 V_1 の場合には 0.8 倍以上の負荷においてしきい値が負となり、限界しゃ断時間の評価を行なうことができない。しかし、結果が安定のための十分条件となるので、本論文の以後の各章ではリアプノフ関数として V_1 を採用する。以上の結果のように実際の限界しゃ断時間との誤差が生じる原因は、伝達コンダクタンスおよび制動、特に前者を無視してリアプノフ関数を構成したことにある。第 2.3 図は各負荷状態について限界しゃ断時間で故障を除去した時の V_1 、 V_2 の値の時間変化を、それぞれのしきい値とともに示したものである。いずれの負荷状態においても、 V_1 は故障除去後しばらくは減少するがその後増加する。逆に V_2 は故障除去後増加する。これらの変化は伝達コンダクタンス（および制動）によるものであり、この両者が 0 であれば V_1 、 V_2 とも時間微分は 0 となるため、故障除去後は一定値となる。



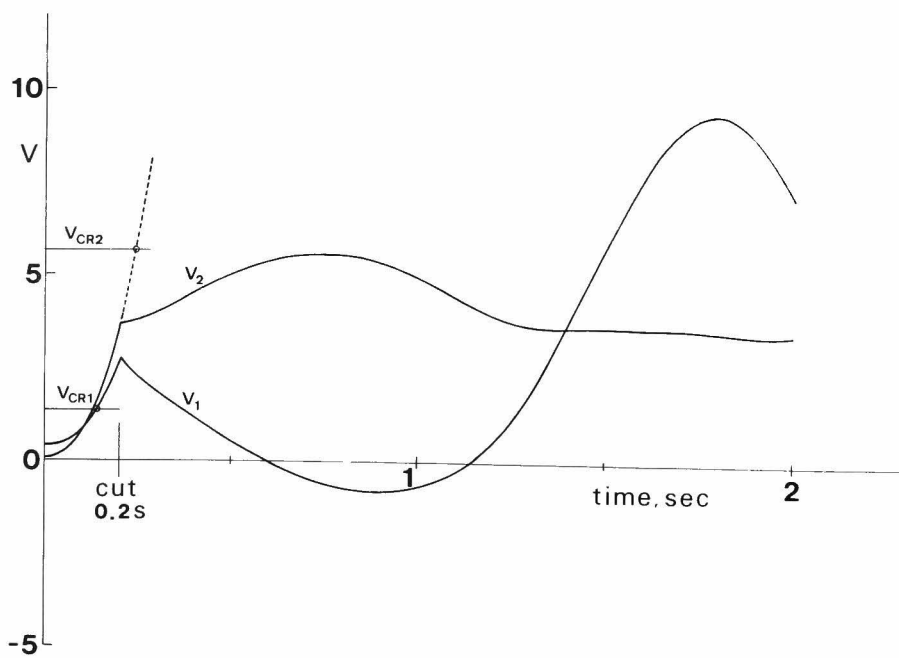
第 2.3 図 限界故障しや断時のリアプノフ関数の変化
(a) 0.2 倍負荷



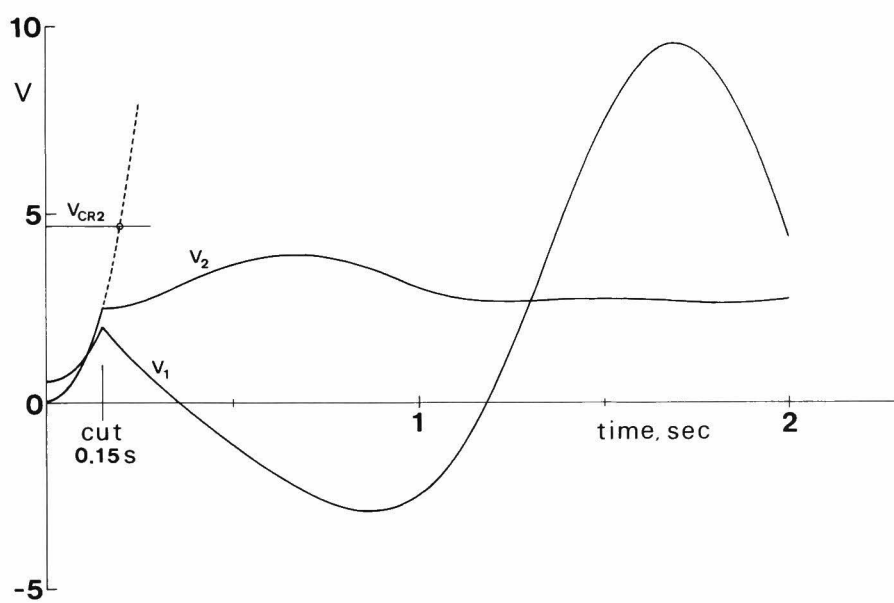
(b) 0.5 倍負荷



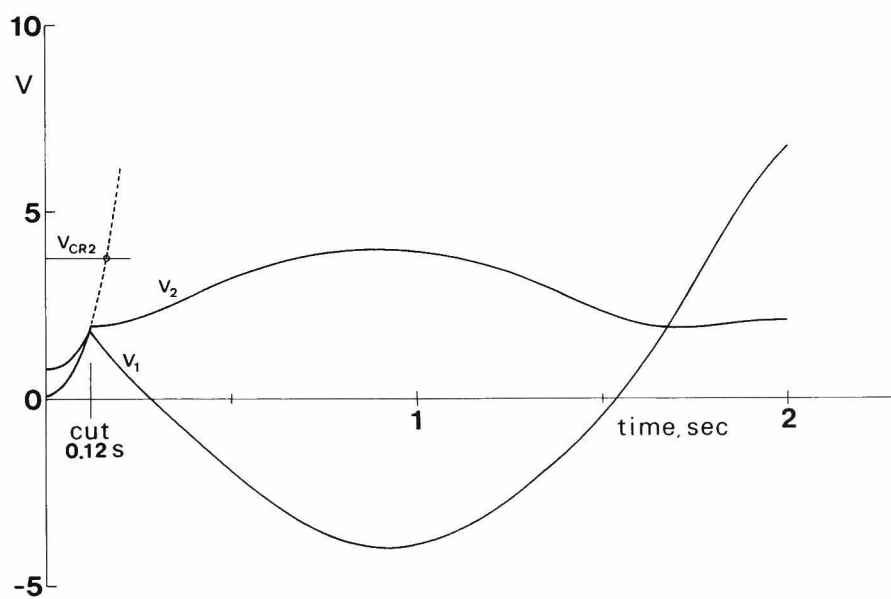
(c) 0.6 倍負荷



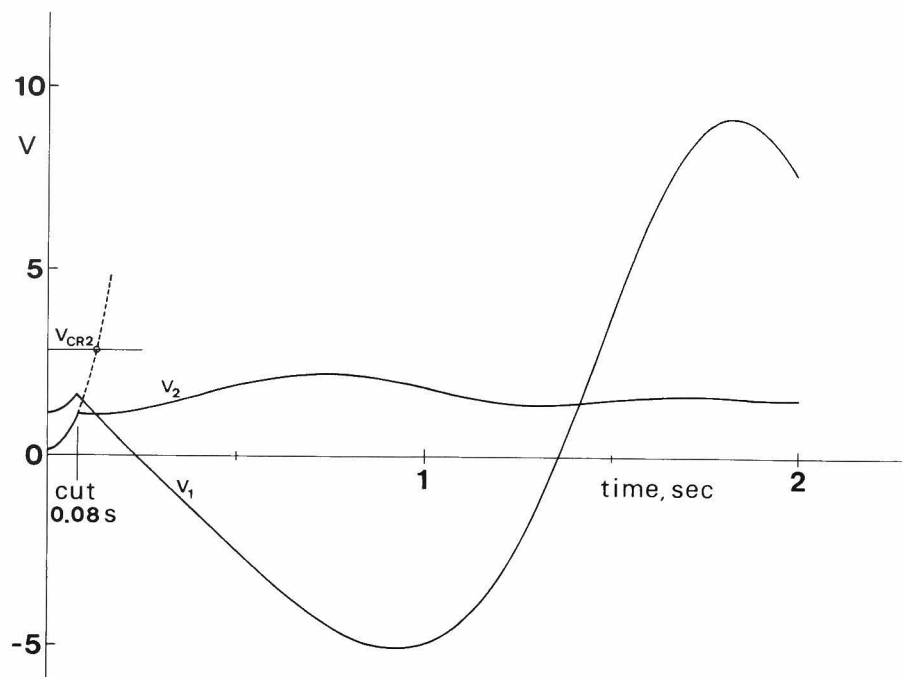
(d) 0.7 倍負荷



(e) 0.8 倍負荷



(f) 0.9 倍負荷



(g) 全 負 荷

第3章 リアプノフ関数の級数展開による過渡安定度解析⁸⁾

リアプノフの直接法による電力系統の過渡安定度解析は、リアプノフ法が安定のための十分条件を与えるだけで必要条件ではないので、限界しゃ断時間の評価は実際の値よりも一般に小さくなる。リアプノフ関数は第2章でも示したように一意的に決定されるものではなく、同一の系に対して何種類も構成される。用いるリアプノフ関数によって、また、系統の運転状態によっては、実際の安定領域とリアプノフ法によるその評価との差が大きくなり、リアプノフ法による評価がほとんど無意味なほど小さくなる場合もある。

この章では、リアプノフの直接法によって求まる安定領域の評価を、リアプノフ関数の級数展開を用いて拡大し、実際の安定領域に近づける方法について述べる。これによって限界しゃ断時間の評価も精度が改善される。リアプノフ関数としては第2章で導いたエネルギー積分による V_1 を用いる。エネルギー積分によるリアプノフ関数は制動の効果を無視して構成されるので、制動が大きいほど実際の安定領域と安定限界の評価との差が大きくなる傾向にある。後に明らかとなるが、本章で提案する方法は、制動が大きいほど同じ計算量によって安定領域の評価がより広く拡大されるという利点を有する。

第1節で提案する方法について述べ、第2節では数値例として一機無限大母線系統に適用し、安定領域の評価の拡大ならびに限界故障除去時間の推定の精度の改善の度合について述べる。第3節では、提案する方法と関連のあるZubovの方法との比較も含めて、所要計算量、多機系統への適用の可能性などについて検討する。

3.1 リアプノフ関数の級数展開による漸近安定領域の評価の拡大

3.1.1 方法の原理

次の微分方程式で記述されるオートノマスな非線形系を考える。

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{3.1}$$
$$f_i(0, 0, \dots, 0) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

あるいは

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) \\ F(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)'$$

非線形関数 f_i は望む階数だけ微分可能であるとする。原点は漸近安定な平衡点であると仮定し、原点のまわりの漸近安定領域について考える。リアプノフ関数による局所的な漸近安定の判別は付録Aで示したように、次の条件によって行なわれる。つまり、初期点 $x(0) = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})'$ は $V[x(0)] < V_{cr}$ であれば時間とともに原点に近づく。ここで、 $V(x)$ はリアプノフ関数、 V_{cr} はリアプノフ関数のしきい値である。

リアプノフの安定定理は安定のための十分条件でしかないので、もし $V[x(0)] > V_{cr}$ であれば、この初期点は安定領域に属するか不安定領域に属するか不明である。しかし、もし漸近安定領域に属しておれば、ある時刻 t_c において $V[x(t_c)] = V_{cr}$ となる。本章では、リアプノフ関数 V の級数展開を用いて、安定限界の評価 $V(x) = V_{cr}$ を拡大し、実際の安定限界に近づける方法について述べる。

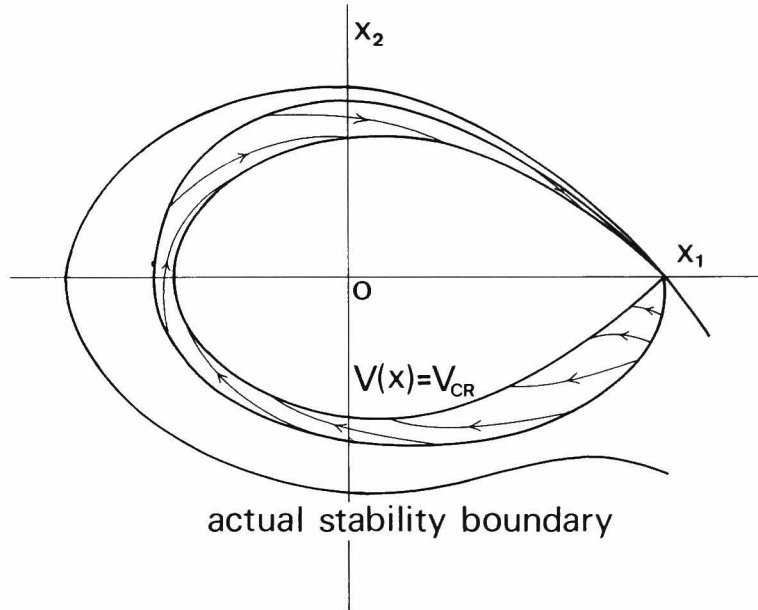
リアプノフ関数 $V[x(t)]$ を級数展開表示すると次のようになる。

$$\begin{aligned} V[x(t)] &= V[x(0)] + t \cdot \left. \frac{dV}{dt} \right|_{x=x(0)} + \frac{t^2}{2!} \cdot \left. \frac{d^2V}{dt^2} \right|_{x=x(0)} \\ &+ \dots + \frac{t^n}{n!} \cdot \left. \frac{d^n V}{dt^n} \right|_{x=x(0)} + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

したがって、 $t = 0$ における V の値とその時間微分の値とから、時刻 t における V の値を知ることができる。 V の各階の時間微分は次式のごとく順次求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot f_i \\ \frac{d^2V}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dV}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{dV}{dt} \right) \cdot f_i \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

ある初期点 $x(0)$ が $V[x(0)] > V_{cr}$ で、かつ漸近安定領域に属していれば、ある時間 t_c において次式が成立する（第3.1図参照）



第 3.1 図 安定領域の評価の拡大の概念図

$$V[x(t_c)] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_c^i}{i!} \cdot \left. \frac{d^i V}{dt^i} \right|_{x=x(0)} = V_{cr} \quad (3.4)$$

本文のリアプノフ関数については、実際の安定限界は次式の曲面で与えられる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V[x(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \cdot \left. \frac{d^i V}{dt^i} \right|_{x=x(0)} = V_{cr} \quad (3.5)$$

実際には計算上の制約により、級数を無限に計算することは不可能であるので、有限項で打ち切る。一般に (3.4) 式において、 t_c が大であるほど、 $V[x(t_c)]$ をある一定の精度で近似するために多くの項を計算する必要がある。計算機の記憶容量等により、計算可能な項数 m があらかじめ決まっている場合には、 m 項までを使って、ある精度で $V[x(t)]$ を計算できる t の値 t_m が決まる。この時、もとのリアプノフ関数による安定領域の評価 $V(x) = V_{cr}$ は次式のように拡大される。

$$V_{ex}(x) \equiv V(x) + t_m \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{t_m^2}{2!} \cdot \frac{d^2 V}{dt^2} + \dots + \frac{t_m^m}{m!} \cdot \frac{d^m V}{dt^m} = V_{cr} \quad (3.6)$$

3.1.2 電力系統の過渡安定度問題への適用

上に述べたリアプノフ関数による漸近安定領域の評価の、級数展開による拡大は、系の漸近的特性—減衰の速さ—によって大きく影響される。制動の大きい系においては安定平衡点への接近が速いので、一定時間 t_m によって安定領域の評価が大きく拡大されるが、制動が0であれば全く拡大されない。

一方、電力系統の過渡安定度解析のためのリアプノフ関数は、第2章(V.1), (V.2)式で示したように、同期発電機の回転の微分方程式の制動項を無視して積分して得られる。これらのリアプノフ関数は、制動と発電機間の伝達コンダクタンスが無視できる場合にはかなり正確な安定領域の評価を与えるが、制動が大きいほど、リアプノフ関数による漸近安定領域の評価は実際の安定領域よりも小さくなる。したがって、ここで提案する手法は、エネルギー積分によるリアプノフ関数を用いた過渡安定度解析に適しているといえる。

3.2 計算例

次の微分方程式で記述される一機無限大母線系³⁾に対して、前節で述べた方法を適用する。

$$M \frac{d^2 \delta}{dt^2} + D \frac{d\delta}{dt} = P_m - P_e \sin \delta \quad (3.7)$$

$$M = 0.0138 \text{ p.u.}, \quad D = 0.057 \text{ p.u.}$$

$$P_m = 0.91 \text{ p.u.}, \quad P_e = 3.02 \text{ p.u.}$$

エネルギー積分によるリアプノフ関数は

$$V(\delta, \omega) = M \omega^2 / 2 - P_m (\delta - \delta^s) - P_e (\cos \delta - \cos \delta^s) \quad (3.8)$$

δ^s : 安定平衡点における δ の値

$$\delta^s = \sin^{-1} (P_m / P_e) = 0.306 \text{ rad.}$$

となり、そのしきい値は不安定平衡点 $(\pi - \delta^s, 0)$ における V の値で与えられる。

$$V_{cr} = V(\pi - \delta^s, 0) = 3.46 \quad (3.9)$$

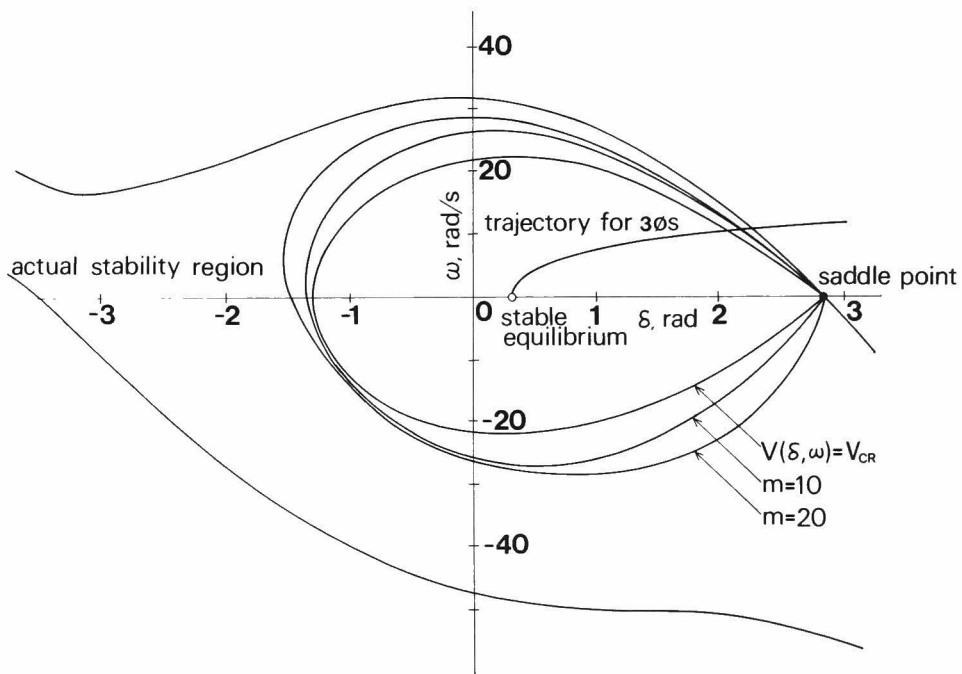
(3.8), (3.9)式より、制動が0の場合の $\delta - \omega$ 平面における安定限界は次の曲線で与えられる。

$$M \omega^2 / 2 - P_m \delta - P_e \cos \delta = -P_m \delta^s - P_e \cos \delta^s = 0.299 \quad (3.10)$$

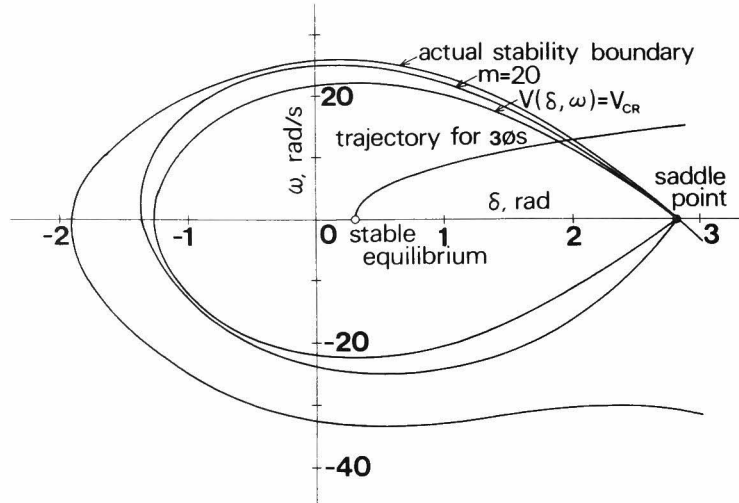
本章で提案する方法をこの問題に対して適用した結果、 V 関数の20階微分まで考慮した場合、

つまり (3.6) 式で m を 20 とした場合、0.08 秒まで ($t_m = 0.08 \text{ sec}$)、 $m=10$ とすると $t_m = 0.05 \text{ sec}$ まで、 10^{-3} 以下の誤差で求められることが明らかとなった。第 3.2 図に、RKG 法によって求めた実際の安定領域、もとの V 関数による安定領域の評価および $m=10$ 、 $m=20$ と級数展開の項を計算することによって拡大された安定領域の評価を示す。この例題系統では制動 D の値が大きく、 $\delta-\omega$ 平面上の初期点の位置にかかわらず軌道は 2π の間隔で並ぶ安定平衡点のいずれかに収束する。同図より、 D の値が大きいため、もとの V 関数による安定領域の評価は実際の安定領域よりもかなり小さくなっていることがわかる。級数展開を用いた方法により安定領域の評価が拡大されている。同図には、定常状態において発電機の電気出力 P_e が 0 となった場合の軌道をも示す。この軌道に沿った時間より、送電線三相短絡時の限界故障除去時間 (c.c.t.) を求めることができる。計算の結果、実際の c.c.t. は 0.288 秒、もとの V 関数による c.c.t. の評価は 0.272 秒である。本章で提案する方法 ($m=20$) によって c.c.t. の評価が 0.282 秒となり、実際の値との誤差が約 $\frac{1}{3}$ に減少している。

第 3.3 図は制動係数 D の値を第 3.2 図の場合の $\frac{1}{2}$ とした時の安定領域である。制動が小さいので、エネルギー積分によるリアプノフ関数で定まる領域の評価は実際の安定領域に近くなっている。級数展開による評価の拡大の程度は第 3.2 図よりも小さい。限界故障除去時間は真の値



第 3.2 図 例題系統の安定領域とその評価



第 3.3 図 制動係数を $\frac{1}{2}$ とした場合の安定領域とその評価

が 0.246 秒，もとの V 関数による評価が 0.238 秒であるのに対して提案する方法による評価 ($m = 20$) は 0.242 秒となり，誤差は半分になっている。

3.3 考 察

級数展開を用いて精確な安定限界を求める方法として Zubov の方法がある。この方法は次の方程式の解によってリアプノフ関数を求めるものである。^{9), 10), 11)}

$$[\nabla V(x)]' F(x) = -U(x) [1 - V(x)] \quad (3.11)$$

ここに $U(x)$ は任意の正定関数である。問題によっては，この偏微分方程式を解いてリアプノフ関数を得ることができるが（付録 E 参照），一般には解が closed form では求まらないので，級数展開を用いて解かれる。 V を次式の級数展開であらわす。

$$V(x) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(x) \quad (3.12)$$

ここで $V_i(x)$ は x についての i 次の多項式である。(3.1)' 式の右辺も次のように級数展開表示する。

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x) \quad (3.13)$$

F_i は x についての i 次の多項式である。(3.11) 式に (3.12)，(3.13) 式を代入して両辺の各次の項について等しいとおくと，

$$\left. \begin{aligned}
 [\nabla V_2]' F_1 &= -U \\
 [\nabla V_3]' F_1 + [\nabla V_2]' F_2 &= 0 \\
 [\nabla V_4]' F_1 + [\nabla V_3]' F_2 + [\nabla V_2]' F_3 &= U \cdot V_2 \\
 \vdots \\
 [\nabla V_i]' F_1 + [\nabla V_{i-1}]' F_2 + \cdots + [\nabla V_2]' F_{i-1} &= U \cdot V_{i-2}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

F_i は既知関数であるので、(3.14)式は上から順に V_2, V_3, \dots, V_i について解くことができ、(3.12)式によってリアプノフ関数 $V(x)$ が求まる。(3.14)式のそれぞれは、 V の各次の多項式の係数を未知数とする連立一次方程式であるので、(3.14)式の級数展開の高次の項まで求めるためには(3.14)式を大きい i の値について解くことが必要となり、高次の係数行列を記憶する必要がある。例えば、20次まで級数展開を求める場合、系が2次であれば最大で21次行列であるが、3次の系では231次、4次では1771次の行列を処理する必要が生ずる。 F_i の性質に応じて係数行列は虫くい行列となるので、これを利用して計算機の必要記憶容量、計算時間を減らす方法も検討されているが¹²⁾ 系の次数が大きくなると記憶容量が膨大になることは避けられない。

さらに、 $V(x)$ を精確に求めた場合には、つまり、(3.11)式が解けるか、あるいは級数を実質上無限に計算した場合には、安定限界を与えるリアプノフ関数のしきい値は1となることから Zubov によって示されている。しかし級数を有限項で打切った場合には、 $V(x) = \text{const.}$ なる面が $\dot{V}(x) = 0$ なる面に接する点における $V(x)$ の値がしきい値を与える。¹⁰⁾ このしきい値は非線形計画法などを用いて求める必要がある。さらに、級数の項数を増加しても、安定領域の評価は実際の安定領域に一樣には近づかない。また、 $U(x)$ の選び方も安定領域の評価に影響を及ぼすことが知られている。^{9), 10)}

本章で提案した方法では、級数展開の項数をいくらで打切っても、しきい値はもとのリアプノフ関数に対して一度求めるだけでよく、打ち切り項数を変えても求めなおす必要がない。また、軌道と軌道が交わることはないので、項数を増加すれば安定領域の評価を必ず拡大することができるという特徴がある。

(3.3)式における偏微分の計算および、それらと D との積を計算するための計算機プログラムを開発した。本方法においても級数の打ち切り次数を大きくすると項数が多くなり、必要記憶容量も増大する。しかし記憶容量はこの場合 V および D の形に大きく依存するので、Zubovの方法との一般的な比較を行なうことはむずかしいが、いくつかの仮定のもとで電力系統の過渡

安定度の場合について比較した結果，3 機系以上の系統については本章で提案した方法の方が記憶容量が少なくすむという結果となった。¹³⁾

第4章 統計的手法による過渡安定度のオンライン評価と過渡安定度を考慮した経済負荷配分へのその応用¹⁴⁾

本章では、リアプノフ関数の電力系統に対する応用例として、リアプノフ関数を用いた過渡安定度の指標を定義し、その指標を使用した統計的処理による過渡安定度のオンライン評価法について述べる。また第2節では、この評価法を用いて、燃料費だけでなく過渡安定度も考慮した発電所間の経済負荷配分について検討する。

4.1 統計的手法による過渡安定度のオンライン評価

電力供給の信頼度を向上させるために信頼度制御（セキュリティ・コントロール）の概念が考えられ、一部実現されつつある（付録F参照）。信頼度制御においては、想定事故に対して供給支障が生ずるか否かをリアルタイムのデータを用いて決定するセキュリティ監視が基本的な役割を果たす。過渡安定度に対するセキュリティ監視のための方法として、パターン認識の手法を用いたものが提案されている。これはオフライン計算によって運転状態空間に安定、不安定を分離する面をあらかじめ求めておき、オンラインでは現在の運転状態がその分離面のいずれの側にあるかによって安定判別を行なうものである。具体的な方法としては、例えば、安定であれば正、不安定であれば負となるような状態変数の関数を求める方法¹⁵⁾あるいは、安定であれば1、不安定であれば0をその値として与え、誤差が最小となるような判別関数を決定する方法¹⁶⁾などが提案されているが、いずれの場合にも安定か不安定かという二値的な結果のみを利用しているという点においては同様である。

本章では、まずリアプノフ関数を用いた過渡安定度の指標を定義し、それを運転状態変数の関数として近似する方法を提案する。つまり、オフライン計算による多くの運転状態についての計算結果を用いて判別関数の形および係数を求めておき、実運用時にはその時の状態ベクトルの値を判別関数に代入して安定度を知ることができる。以上のように安定度の指標を用いることにより、単に安定または不安定という二者択一的な結果のみを利用する場合よりも、オフライン計算の計算例の数を減らすことができると考えられる。

4.1.1 過渡安定度の指標

まず過渡安定度の指標を定義する。ここではリアプノフ関数にもとづく次のような指標を用いる¹⁷⁾。

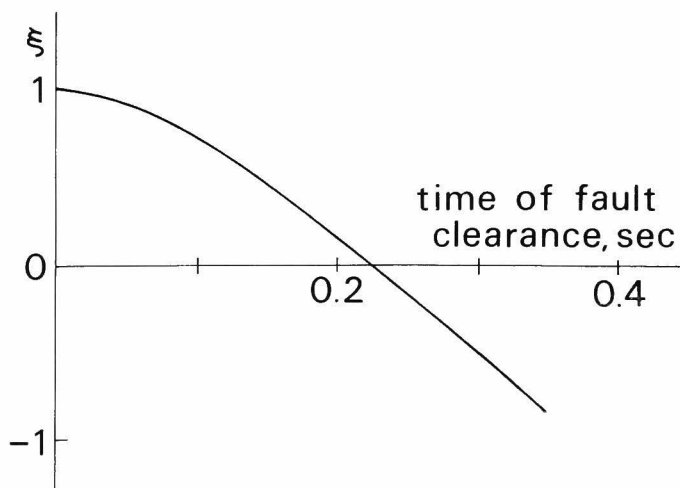
$$\xi = 1 - (V_c / V_{\max}) \quad (4.1)$$

ただし

V_c : 故障回復時のリアプノフ関数 V の値

V_{\max} : 脱調モードに対応するあん点におけるリアプノフ関数の値 (しきい値)

V_c / V_{\max} は故障回復時の状態から安定平衡点までの距離をリアプノフ関数の値によって表わしたもので、指標 ξ は安定限界に至るまでのリアプノフ関数の値の余裕を V_{\max} で除することによって規格化したものといえることができる。したがって、この指標は系統が安定であれば、系統の構成や故障の位置、種類にかかわらず 0 から 1 の間の値をとり、不安定であれば負の値をとる。一例として、ある過渡安定度計算例について、横軸に故障除去時間を取り縦軸にこの指標を示すと第 4.1 図のようになる。故障継続時間が長くなるにしたがって安定度の指標が小さくなり、0.22 秒で 0 となり安定限界に至ることがわかる。



第 4.1 図 シャ断時間の変化に対する過渡安定度の指標の変化の一例

4.1.2 最小二乗法による関数近似

本章で提案する過渡安定度のオンライン評価法は前述のように、種々の運転状態に対してオフライン計算で過渡安定度の指標を計算し、これを近似する運転状態ベクトルの関数を求める。この場合の関数近似は次のように定式化することができる。

“ある領域で定義されたベクトル x の関数 $g(x)$ が、その領域内のいくつかの点 $\{x_i\}_{i=1}^{\ell}$ とその点における値 $\{g(x_i)\}_{i=1}^{\ell}$ とのみによって与えられている場合に、適当な関数 $f(x)$ を選んで二乗誤差

$$E = \sum_{i=1}^{\ell} [g(x_i) - f(x_i)]^2$$

を最小にする”

$f(x)$ がある既知関数系 $\{f_k(x)\}$ の一次結合として

$$f(x) = \sum_{k=1}^m a_k f_k(x) \quad (m \leq \ell)$$

で与えられる場合には、二乗誤差を最小にする係数 a_k を決定する条件方程式は次式で与えられる。

$$\sum_{i=1}^m A_{ki} a_i = B_k, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

ただし

$$A_{kj} = \sum_{i=1}^{\ell} f_k(x_i) f_j(x_i)$$

$$B_k = \sum_{i=1}^{\ell} g(x_i) f_k(x_i)$$

たとえば、状態変数の一次関数で近似する場合には、

$$f_1(x) = x_1$$

$$f_2(x) = x_2$$

$$\vdots$$

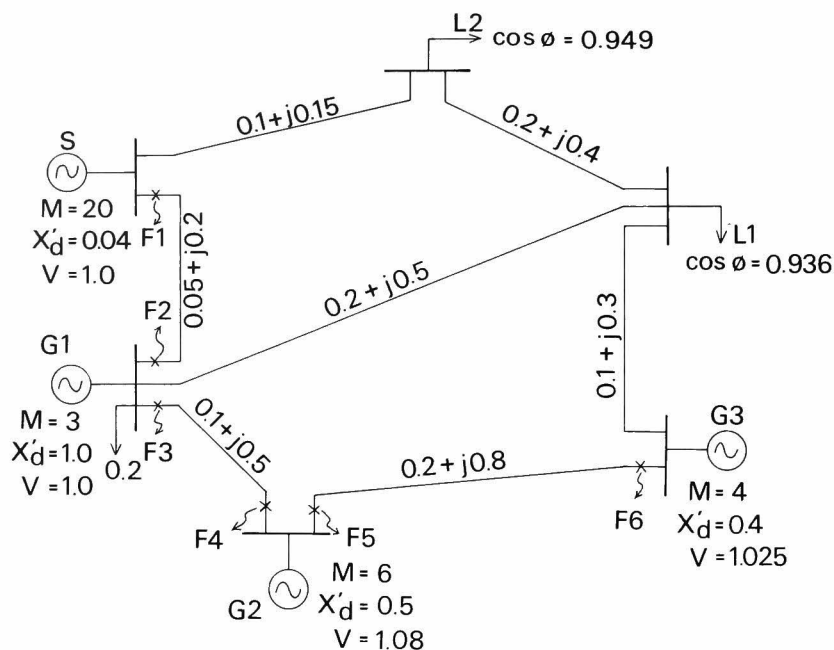
$$f_n(x) = x_n$$

$$f_{n+1}(x) = 1$$

とすればよい。

4.1.3 計算例

計算例として第 4.2 図に示す 4 発電機 6 母線の系統¹⁸⁾に提案する方法を適用する。第 1 母線をスラック母線とし、第 2～4 母線を P-V 指定母線、第 5, 6 母線を P-Q 指定母線とする。想定故障としては図に示した 6 つの位置における三相短絡を仮定した。故障除去時間は、不安



第 4.2 図 例題系統

定な運転状態が相当数あらわれるように、故障 1～4 については 0.2 秒、故障 5, 6 については 0.3 秒とした。再閉路は考えない。運転状態変数としては、スラック発電機を除く 3 発電機の有効出力電力 P_{G1} , P_{G2} , P_{G3} と 2 つの負荷母線につながる負荷の消費する電力 P_{L1} , P_{L2} の 5 つとし、発電機の端子電圧の大きさおよび負荷の力率は一定と仮定した。これらの状態変数を第 4.1 表に示す上下限内で乱数を用いて変化させて 200 の運転状態を作り、そのうち定態的に不安定となるケースを除いて提案する手法を適用する。安定度の指標を定義するためのリアプノフ関数としては、第 2 章 (V.1) 式の V_1 を用いる。また、安定度の指標を近似する近似関数として、ここでは状態変数の二次関数を用いる。

第 4.1 表 発電機出力と負荷の上下限

	下限 (p. u.)	上限 (p. u.)
P_{G1}	0.1	0.4
P_{G2}	0.2	0.5
P_{G3}	0.1	0.4
P_{L1}	0.1	0.5
P_{L2}	0.05	0.45

各想定故障について計算例の数、最小二乗法によって安定度の指標を近似した場合の二乗誤差の和、1 計算例あたりの誤差および安定、不安定の誤判別数を第 4.2 表にまとめる。故障 1, 2 については誤差および誤判別数が他と比較して若干大きくなっているが、全体として 95

第 4.2 表 各故障に対する過渡安定度の評価

故 障		F 1	F 2	F 3	F 4	F 5	F 6	最小値
サンプル数		188	158	200	200	200	200	158
(安定なサンプル数) (不安定なサンプル数)		(161) 27	(74) 84	(115) 85	(172) 28	(105) 95	(122) 78	(41) 117
指標の誤差の二乗和 (1つのサンプルについての 平均誤差)		6.91 (0.192)	1.93 (0.111)	0.023 (0.0107)	0.123 (0.0248)	0.005 (0.005)	0.239 (0.0346)	8.72 (0.235)
誤判断数*	安定→不安定	6 (3)	4 (7)	1 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (2)	5 (5)
	不安定→安定	0 (0)	2 (0)	0 (5)	0 (1)	0 (5)	2 (5)	2 (1)
誤判断率* (%)	安定→不安定	3.2 (1.6)	2.5 (4.4)	0.5 (0)	0 (0)	0 (0)	0.5 (1.0)	3.2 (3.2)
	不安定→安定	0 (0)	1.3 (0)	0 (2.5)	0 (0.5)	0 (2.5)	1.0 (2.5)	1.3 (0.6)
	合 計	3.2 (1.6)	3.8 (4.4)	0.5 (2.5)	0 (0.5)	0 (2.5)	1.5 (3.5)	4.4 (3.8)

* カッコ内の値は、パターン認識法による値

%以上の正判断率であり、十分な精度といえる。同表には前述のパターン認識による方法（安定であれば 1，不安定であれば 0 となるような判別関数を最小二乗近似で求める）の場合の誤判別の個数も示す。故障 1 の場合を除いてここで提案する方法の方が誤判別の数が少ない。

今の例題では 6 つの故障を想定し、そのおのおのについて安定度の指標を近似する関数を求めて計算を行なった。安定度改善のために潮流分布変更などの手段を講ずる場合、ある故障に対する対策が他の故障に対して悪影響を及ぼすことが当然あり得る。

パターン認識の手法を用いる場合には、すべての想定故障に対して安定の場合を安定、一つでも不安定となる故障があれば不安定として適用されるが、本文で述べた方法を用いるためには複数個の故障に対する総合的な指標を定義する必要がある。その一例として、各想定故障に対する安定度の指標の最小値を総合的な指標と定義して前と同様の判別を行なった。第 4.2 表の右端の欄にその結果を示す。指標の誤差は、想定故障一つの場合と比べて若干大きくなっているが、誤判断率は 5 % 以内におさまっている。

本計算例では運転状態変数として各母線の電力を用いたが、安定度の評価という点のみを考えるならば、誘起電圧の相差角等、安定度とより関連の大きい変数を状態変数に選んで、近似関数の形をより簡単にしたり、オフライン計算の計算ケース数を少なくすることが可能である。しかし、安定度だけでなく経済運用などの他の目的との協調を考える場合には、発電機出力のような直接制御できる量を運転状態変数とする方が望ましいといえる。

4.2 過渡安定度を考慮した経済負荷配分

火力発電所間の負荷配分を行なう場合、従来のように発電燃料費の合計を最小にするという経済性だけでなく、安定度などの供給信頼度をも考慮した最適な負荷配分の重要性が指摘され、その一例として定態安定度を考慮した最適負荷配分の考え方ならびに計算法が提案されている。¹⁹⁾ 本節では、前節で述べた過渡安定度のオンライン評価法を用いて過渡安定度を考慮に入れた経済負荷配分法について述べ、例題計算の結果を示す。

4.2.1 問題の定式化

以下の定式化は、簡単のために、前節で計算を行なった例題に即して述べるが、より一般的な場合、例えば、発電機端子電圧が一定、負荷の力率が一定などの、前節で行なった仮定が成り立たない場合でも、同様の定式化は可能である。

前節と同様に、スラック発電機を除く発電機の出力を P_{Gi} , $i = 1, 2, \dots, n$, 負荷の消費電力を P_{Li} , $i = 1, 2, \dots, m$ とすれば、過渡安定度の指標は次の近似関数で与えられている。

$$\mathcal{E} = \xi(P_G, P_L) \quad (4.2)$$

ただし

$$P_G = (P_{G1}, \dots, P_{Gn})$$

$$P_L = (P_{L1}, \dots, P_{Lm})$$

与えられた負荷分布 P_L 、発電機出力分布 P_G に対して、スラック母線の出力 P_s は次式によって求められる。

$$P_s = \sum_{i=1}^m P_{Li} + P_\ell - \sum_{i=1}^n P_{Gi} \quad (4.3)$$

ここで P_ℓ は送電損失をあらわす。

送電損失 P_ℓ は、関数 ξ を決定するためのオフライン計算の最初に行なう潮流計算によって求まるので、安定度の指標と同様にして送電損失も運転状態変数 P_G, P_L の関数として近似することができる。

$$P_\ell = p_\ell(P_G, P_L) \quad (4.4)$$

ある与えられた負荷分布のもとでは、安定度の指標 \mathcal{E} 、送電損失 P_ℓ は発電機出力 P_G のみの関数となり、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi'(\mathbf{P}_G) \\ P_\ell &= p'_\ell(\mathbf{P}_G) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

また、各発電所の燃料費特性を $F_i(P_{Gi})$ ， $i = 1, \dots, n$ ，スラック母線を通しての電力融通の費用特性を $F_s(P_s)$ とする。

以上の考察より、過渡安定度を考慮した経済負荷配分問題を次のように定式化する。

“目的関数

$$\phi(\mathbf{P}_G) = C_1 [F_s(P_s) + \sum_{i=1}^n F_i(P_{Gi})] - C_2 \xi'(\mathbf{P}_G) \quad (4.6)$$

を制約条件

$$P_{Gi} \leq P_{Gi} \leq \bar{P}_{Gi} \quad (\text{出力の制約})$$

$$\xi'(\mathbf{P}_G) \geq 0 \quad (\text{過渡安定度の制約})$$

のもとで最小化する”

ただし

P_s : (4.3) 式で与えられるスラック母線電力

P_{Gi} : 第 i 発電所の出力の下限

\bar{P}_{Gi} : 第 i 発電所の出力の上限

C_1, C_2 : 経済性、安定性に対する重み係数

4.2.2 問題の解法

前節で定式化した経済負荷配分問題は、過渡安定度の指標の近似関数として 4.1 節で用いた二次関数を用いると、目的関数および過渡的安定の制約条件が非線形となるため、不等式制約条件付の非線形最適化問題となる。制約条件付の非線形最適化問題については、制約条件式を目的関数の中に入れて制約なしの最適化問題に帰着させて解く方法が各種考案されている。次の計算例では Powell 氏によって提案された方法を用いる。²⁰⁾ (付録 G 参照)

4.2.3 計算例

4.1 節の計算例で用いた系統および想定事故に対して上述の方法を適用する。

各発電所の燃料費特性を次のように仮定する。

$$F_1(P_{G1}) = 0.8 + 9P_{G1} + 6P_{G1}^2 \quad (\text{万円/時})$$

$$F_2(P_{G2}) = 1.7 + 10P_{G2} + 7P_{G2}^2 \quad (\text{万円/時})$$

$$F_3(P_{G3}) = 1.2 + 12P_{G3} + 6P_{G3}^2 \quad (\text{万円/時})$$

また、スラック母線の電力費特性を、

$$F_s(P_s) = \begin{cases} 14P_s + 8P_s^2 & P_s \geq 0 \\ 14P_s - 8P_s^2 & P_s < 0 \end{cases} \quad (\text{万円/時})$$

とする。第 4.3 表に示す 2 つの負荷パターンに対して、目的関数の重み係数 c_2/c_1 を変化させて最適解を求める。

負荷パターン 1 に対する安定度を考慮しない経済負荷配分の結果を第 4.4 表 (a) に示す。この場合 F 2, F 3 の 2 つの故障に対して不安定となることがわかる。そのうちの故障 F 2 に対する過渡安定度を考慮した場合の解を、横軸に c_2/c_1 の値をとって示すと第 4.3 図のようにな

第 4.3 表 最適負荷配分に用いた負荷パターン

	$P_{L1}(\text{p. u.})$	$P_{L2}(\text{p. u.})$
負荷パターン 1	0.4	0.3
負荷パターン 2	0.45	0.1

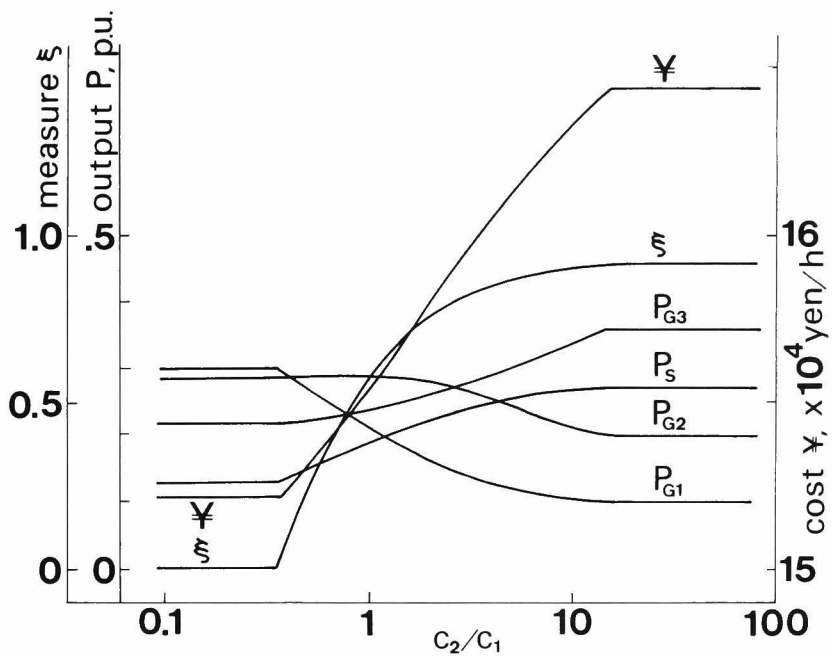
第 4.4 表 安定度を考慮しない経済負荷配分の結果

(a) 負荷パターン 1

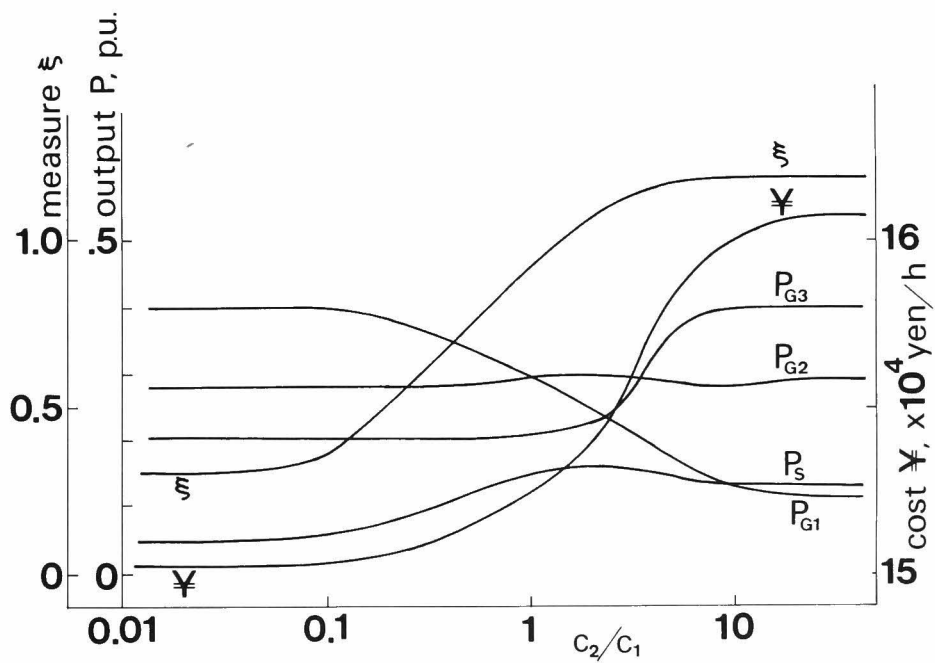
	出力 (p. u.)	燃料費 (万円/ h)	安定度の指標	
P_s	0.046	0.666	F 1	0.300
P_{G1}	0.400	5.360	F 2	- 1.096
P_{G2}	0.284	5.110	F 3	- 0.802
P_{G3}	0.204	3.897	F 4	0.803
			F 5	0.431
			F 6	0.526
合計	0.934	15.034	最小値	- 0.786

(b) 負荷パターン 2

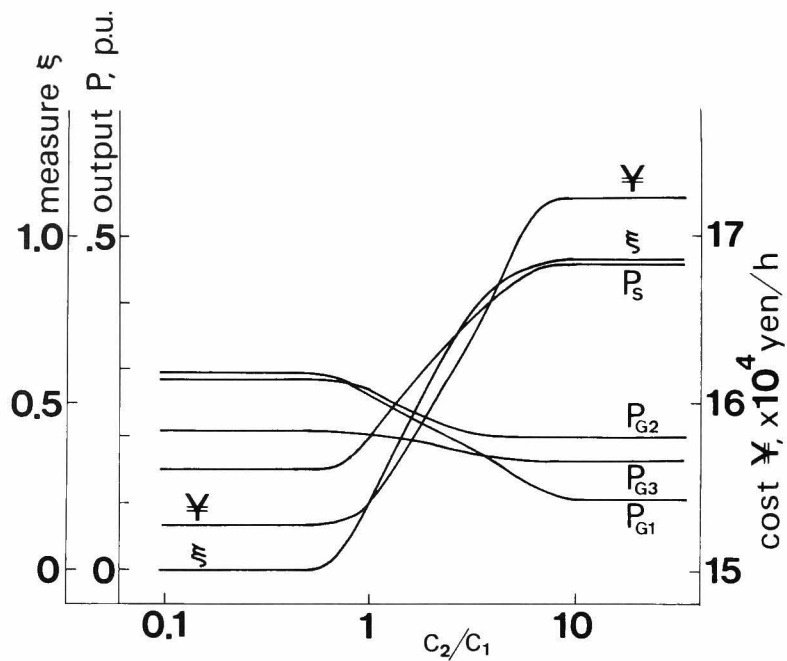
	出力 (p. u.)	燃料費 (万円/ h)	安定度の指標	
P_s	- 0.487	- 8.715	F 1	- 2.875
P_{G1}	0.400	5.360	F 2	- 5.800
P_{G2}	0.500	8.451	F 3	- 1.391
P_{G3}	0.400	6.961	F 4	- 0.199
			F 5	- 1.099
			F 6	- 0.647
合計	0.813	12.057	最小値	- 2.349



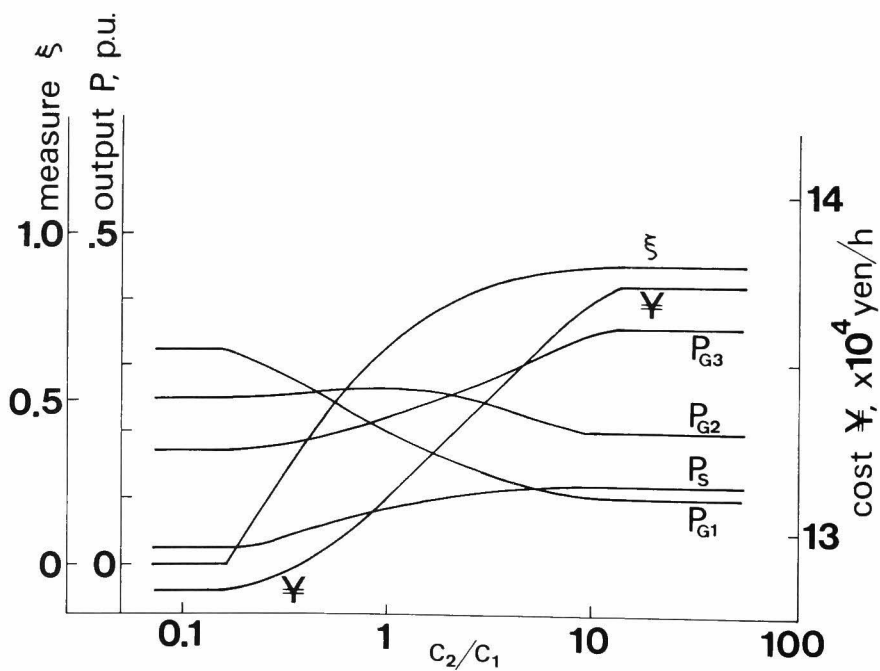
第 4.3 図 故障 F2 に対する過渡安定度を考慮した経済負荷
 配分 (負荷パターン 1)



第 4.4 図 故障 F1 に対する過渡安定度を考慮した経済負荷
 配分 (負荷パターン 1)



第 4.5 図 すべての故障に対する過渡安定度を考慮した経済
 負荷配分（負荷パターン 1）



第 4.6 図 故障 F2 に対する過渡安定度を考慮した経済負荷
 配分（負荷パターン 2）

る。 c_2/c_1 の値が0.35以下では安定度の制約条件によって解が制約されており、安定度の指標は0であるが、 c_2/c_1 が0.35以上になると目的関数の中の安定度の項が効いてきて、 P_{G1} が小さくなり安定度の指標が大きくなる。それにつれて燃料費も増加することがわかる。また c_2/c_1 が15以上になると目的関数中の安定度の項が支配的となり、 P_{G1} 、 P_{G2} は下限値で拘束され、 ξ の値も燃料費も一定となる。第4.4図は故障F1に対する過渡安定度を考慮した解を、第4.3図と同様に横軸に c_2/c_1 をとって図示したものである。 c_2/c_1 が小さい時は安定度を考慮しない経済負荷配分の解に一致するが、 c_2/c_1 を大きくすると安定度の指標が大きくなるような発電電力分布となり、それにつれて燃料費も増加することがわかる。

第4.5図は、各想定故障に対する安定度の指標の最小値を ξ とすることによって、6つの想定故障すべてを考慮した場合の解を示す。故障F2のみを考慮した場合とほぼ同様の傾向を示す。

負荷パターン2の場合には第4.4表(b)に示すように、安定度を考慮しない経済負荷配分ではすべての想定故障に対して不安定となる。第4.6図は故障F2に対する安定度を考慮した場合の解を示す。安定度を無視した経済負荷配分では不安定であるので、第4.4、4.5図と同様の傾向を示す。

4.3 要 約

本章ではリアプノフ関数の電力系統安定度問題に対する応用の一例として、信頼度制御等において用いることを目的とした統計的手法による過渡安定度のオンライン評価法を示し、計算例として4発電機6母線よりなるモデル系統に適用した。また、同じ目的のために提案されているパターン認識によるオンライン評価法との比較も行なった。さらに、提案した過渡安定度のオンライン評価法の応用例として、燃料費のみでなく過渡安定度も同時に考慮した経済負荷配分の計算法について述べ、同じモデル系統に適用して計算を行なった。その結果

- (1) 本章で提案した統計的手法によって、過渡安定度の評価を十分な精度で高速に行なうことができる。
- (2) したがって信頼度制御のための信頼度評価に用いることができる。
- (3) パターン認識の手法によるよりも若干精度がよい(誤判断の数が少ない)。
- (4) 安定度が運転状態変数の簡単な関数で評価できるので、経済負荷配分などに組み込んで安定度を考慮した運用を行なうことが可能になる。

などの事が明らかとなった。

第5章 リアプノフ関数にもとづく過渡安定度解析 のための電力系統の等価簡略化法^{21), 22), 23)}

大規模で複雑な電力系統の安定度解析を行なう場合、全系統を一様に詳細に表現することは不可能であるか、たとえ可能であったとしても経済的ではないことが普通である。そのため、系統の等価縮約表現 (system aggregation) の研究がかなり古くから行なわれてきている。それらの手法は次の三種類に大別される。

- (1) 系統の等価回路と、配分係数 (distribution factor) にもとづく慣性の配分によるもの、²⁴⁾
- (2) 過渡時にまとまって動揺する合着発電機群を等価な発電機で置き換えて発電機数を減少させるもの、²⁵⁾
- (3) 線形化した微分方程式系に対してモード解析を行ない、次数を減少させるもの。²⁶⁾

合着性を用いる(2)の方法は物理的意味が明確であり、また従来の過渡計算プログラムをそのまま使えるという点で有利であるが、まとめるべき発電機群をいかに選び出すかという合着性の判定は、系統全体の計算結果と経験によることが多く、系統的に判定する方法はほとんど得られていない。²⁷⁾

本章ではリアプノフ関数の応用例として、リアプノフ関数にもとづく、過渡安定度解析のための等価簡略化法を提案する。これは、ある発電機群に対する部分的なリアプノフ関数の値が、系統全体のリアプノフ関数の値と比較して十分小さければ、その群をひとつの等価発電機でまとめることができるとするもので、系統全体を長時間シミュレートする必要なく縮約可能発電機群を決定することができる。等価発電機の定数および等価回路の決定も、簡略化によって系統全体のリアプノフ関数の値ができるだけ変化しないように行なう。10機系ならびに50機系の2種類の例題系統にこの方法を適用してその有効性を検討する。

5.1 リアプノフ関数を用いた縮約可能発電機群の決定

5.1.1 決定法の考え方

付録Aで述べたリアプノフの直接法による過渡安定判別の過程より、ある一部の発電機だけに対するリアプノフ関数の値が、系統全体についてのリアプノフ関数の値と比較して十分小さければ、その発電機群をまとめてひとつの等価な発電機でおきかえても、リアプノフ関数の値は余り変化せず、したがってリアプノフ関数による安定判別は簡略化前と余りちがわないだろうことが予想される。同時に、部分的なリアプノフ関数の値が小さい発電機グループは位相角、

角速度の値がたがい近く、よく似た動揺をするので、簡略化した系統のふるまいは原系統のふるまいをよく近似すると考えられる。本章で述べる縮約可能発電機群の選定は上述の考え方によるものである。

5.1.2 系統動揺方程式とリアプノフ関数

系統内の各発電機の回転子の運動は、もっとも単純な過渡安定度解析において用いられる古典的モデル(2.1)式で表現されるものとする。

$$\frac{d\delta_k}{dt} = \omega_k$$

$$M_k \frac{d\omega_k}{dt} = P_{mk} - P_{ek} - D_k \omega_k$$
(5.1)

$$P_{ek} = G_{kk} E_k^2 + \sum_{i=1, i \neq k}^n E_i E_k [G_{ki} \cos(\delta_k - \delta_i) + B_{ki} \sin(\delta_k - \delta_i)]$$

ただし、
 E_k : 第 k 発電機の過渡リアクタンス x'_d 背後の誘起電圧
 δ_k, ω_k : 第 k 発電機の位相角および角速度の偏差
 $G_{ik} + jB_{ik}$: 第 i 発電機と第 k 発電機の誘起電圧間の伝達アドミタンス
 M_k, D_k : 第 k 発電機の慣性定数と制動係数
 P_{mk}, P_{ek} : 第 k 発電機の機械入力と電気出力

本章でも、上の微分方程式の第一積分(エネルギー積分)から導かれるリアプノフ関数(V.1)式を用いる。

$$V(\delta, \omega) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n M_j M_k \omega_{jk}^2 / 2 M_T$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n (-M_k P_{mj} + M_j P_{mk} + M_k G_{jj} E_j^2 - M_j G_{kk} E_k^2)$$

$$\times (\delta_{jk} - \delta_{jk}^s) / M_T - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n B_{jk} E_j E_k (\cos \delta_{jk} - \cos \delta_{jk}^s) \quad (5.2)$$

ただし、 $\omega_{jk} = \omega_j - \omega_k$

$$\delta_{jk} = \delta_j - \delta_k$$

$$M_T = \sum_{i=1}^n M_i$$

δ_{jk}^s : 故障除去後の安定平衡点における δ_{jk} の値

5.1.3 決定のアルゴリズム

(5.2) 式のリアプノフ関数を、一例として4機系について Σ を用いないで書き下すと、

$$\begin{aligned}
 V = & (M_1 M_2 \omega_{12}^2 + M_1 M_3 \omega_{13}^2 + M_1 M_4 \omega_{14}^2 \\
 & + M_2 M_3 \omega_{23}^2 + M_2 M_4 \omega_{24}^2 + M_3 M_4 \omega_{34}^2) / 2 M_T \\
 & + \{ \{ -M_1 (P_{m2} - G_{22} E_2^2) + M_2 (P_{m1} - G_{11} E_1^2) \} (\delta_{21} - \delta_{21}^s) \\
 & + \{ -M_1 (P_{m3} - G_{33} E_3^2) + M_3 (P_{m1} - G_{11} E_1^2) \} (\delta_{31} - \delta_{31}^s) \\
 & + \{ -M_1 (P_{m4} - G_{44} E_4^2) + M_4 (P_{m1} - G_{11} E_1^2) \} (\delta_{41} - \delta_{41}^s) \\
 & + \{ -M_2 (P_{m3} - G_{33} E_3^2) + M_3 (P_{m2} - G_{22} E_2^2) \} (\delta_{32} - \delta_{32}^s) \\
 & + \{ -M_2 (P_{m4} - G_{44} E_4^2) + M_4 (P_{m2} - G_{22} E_2^2) \} (\delta_{42} - \delta_{42}^s) \\
 & + \{ -M_3 (P_{m4} - G_{44} E_4^2) + M_4 (P_{m3} - G_{33} E_3^2) \} (\delta_{43} - \delta_{43}^s) \} / M_T \\
 & - B_{21} E_2 E_1 (\cos \delta_{21} - \cos \delta_{21}^s) - B_{31} E_3 E_1 (\cos \delta_{31} - \cos \delta_{31}^s) \\
 & - B_{41} E_4 E_1 (\cos \delta_{41} - \cos \delta_{41}^s) - B_{32} E_3 E_2 (\cos \delta_{32} - \cos \delta_{32}^s) \\
 & - B_{42} E_4 E_2 (\cos \delta_{42} - \cos \delta_{42}^s) - B_{43} E_4 E_3 (\cos \delta_{43} - \cos \delta_{43}^s) \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

ここで、No. 2, 3, 4 の3つの発電機が全く同じふるまいをする、つまり、動揺曲線が完全に平行であると仮定すると、上式のリアプノフ関数のうち線で囲んだ部分は零となる。この部分は、分母が $(M_2 + M_3 + M_4)$ でなくて M_T であるという点を除けば、No. 2, 3, 4 の3つの発電機に対する部分的なリアプノフ関数になっている。したがって、合着発電機群に対する部分的なリアプノフ関数の値は小さくなるのがわかる。逆に、部分的なリアプノフ関数の値が小さくても、必ずしもその発電機群が合着グループであるとは限らず、たまたま値が小さくなることもありうるが、以下に示すようなアルゴリズムによって合着性を十分正確に判定することができる。

合着判定のアルゴリズム

ステップ1 対象とする系統に適した方法で、簡略化を考える部分とそのまま詳細に表現する部分とに分ける。

ステップ2 簡略化を考える部分に属する発電機のうち、まだどの合着グループにも属さず、かつ、まだリアプノフ関数の値を計算していない発電機対のなかで、伝達アドミタンスの絶対値が最大のものを取り上げる。そのような発電機対がなければ終了。あっても、アドミタンスの値がある決まった値 Y_{thr} よりも小さければ終了。

ステップ3 ステップ2で選ばれた発電機対についてリアプノフ関数の値を計算する。あるしきい値 V_{thr} よりも小さければステップ4へ、大きければステップ2へ。

ステップ4 どの合着グループにも属さない発電機のうち、今考えている群ととの間の伝達アドミタンスが最大のものを選ぶ^{*}。このアドミタンスが Y_{thr} よりも小さければ、その群をひとつの合着グループとしてステップ2へ。大きければその発電機を加えてリアプノフ関数の値を計算する。

ステップ5 リアプノフ関数の値がまだ V_{thr} よりも小さければ、その発電機を加えてステップ4へ。 V_{thr} よりも大きくなればその発電機を除いてひとつの合着グループとしてステップ2へ。

この合着性の判定に用いる部分的なリアプノフ関数の値は、故障発生後の適当な時刻において計算すればよく、したがって、故障中に対する系統全体のシミュレーションをわずかの時間行なうだけで合着性を定められた手順で判定することができる。また、角加速力が、故障発生後短時間は故障発生時の値で一定とみなすことができるならば、ある時間後の角速度と相差角を近似的に求めることができるので、系統全体のシミュレーションは全く行なうことなく合着性を判定することができる〔第3節の計算例参照〕。

5.2 等価発電機の定数と等価回路

合着性にもとづく安定度等価回路の作成は、合着性の判定と等価系統の決定の2段からなる。合着性の判定法がいままで余り考えられていなかったのに対して、等価回路、等価発電機のパラメータの決定法はかなり多くの文献に見られる。それらにはかなりの共通点があるが、ここではリアプノフ関数の値の変化ができるだけ小さくなるように等価パラメータを決定する。すなわち、(a)まとめられる発電機間の角速度が零 ($\omega_{ij} = 0, i, j \in S, S$: まとめられる発電機の集合)、(b)相差角は故障除去後の安定平衡点における値に等しい ($\delta_{ij} = \delta_{ij}^s, i, j \in S$) (c) 過渡リアクタンス背後の内部誘起電圧が等しい ($E_i = E_j, i, j \in S$) の3つの仮定のもとでリアプノフ関数の値が変化しないように等価パラメータを決定する。

等価パラメータ (下付文字 e は等価発電機を表わす)

運動エネルギーに対応する部分より

*: 発電機群とあるひとつの発電機ととの間の伝達アドミタンスは、群に属する各発電機とその発電機との間の伝達アドミタンスの最大値で定義する。

$$M_e = \sum_{i \in S} M_i \quad (5.4)$$

位置エネルギーに対応する部分の第一項より

$$P_{me} = \sum_{i \in S} P_{mi} \quad (5.5)$$

$$\dot{Y}_{ee} = \sum_{i, j \in S} \dot{Y}_{ij} \quad (5.6)$$

位置エネルギーに対応する部分の第二項より

$$\dot{Y}_{ej} = \sum_{i \in S} \dot{Y}_{ij} \quad (5.7)$$

本文で用いたリアプノフ関数は制動の効果を考慮していないので、ここでは等価発電機の制動係数として、 D_i/M_i を M_i の重みをつけて平均した値

$$D_e/M_e = \left[\sum_{i \in S} (D_i/M_i) \times M_i \right] / \sum_{i \in S} M_i$$

$$D_e = \sum_{i \in S} D_i \quad (5.8)$$

を用いる。また、内部誘起電圧は各発電機の誘起電圧を、自己アドミタンスの重みをつけて平均した値

$$E_e = \sum_{i \in S} |\dot{Y}_{ii}| E_i / \sum_{i \in S} |\dot{Y}_{ii}| \quad (5.9)$$

とする。

以上の等価パラメータのもとで平衡点の相差角を求めなおし、それを初期値として過渡計算を行なう。平衡点を求めるためのくりかえし計算の初期値として、非縮約発電機については原系統の値を、縮約発電機については原系統の値の平均（慣性定数の重みつき）を用いれば、1回か2回のくりかえしで平衡点が求まる。

5.3 計算結果とその検討

5.3.1 10 機系統

これまで述べた方法を、まず第2章で用いた第2.2図の10機系統（0.5倍負荷）に適用する。故障としては図中の×点の何れか一方における三相短絡（それぞれ故障A、故障Bと記す）を仮定し、再開路は考えない。合着性判定のアルゴリズム中ステップ1の、簡略化の可能性のある部分の分離は、実際問題においては地域的な特性や電力会社間の境界などによって自然に行

ない場合もあると考えられるが、ここでは、故障点からのアドミタンスの大きさ（アドミタンス距離。²⁷⁾ 付録H参照）によって分離を行なった。第5.1表に発電機内部誘起電圧からみたアドミタンス行列（絶対値）を示す。故障Aの場合、故障点至近の発電機No.2からのアドミタンスが1p.u.以下のものを縮約の可能性のあるものとする、No.4～9が選ばれる。これらの発電機に対して前述の合着判定アルゴリズムを適用すると、結果は第5.2表ようになる。

第5.1表 発電機間伝達アドミタンス (p. u.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	発電機番号
21.08	1.39	2.35	1.14	1.36	0.52	1.52	2.82	2.60	4.62	1
	7.95	1.18	0.57	0.68	0.26	0.76	0.53	0.40	1.44	2
		10.14	0.52	0.62	0.24	0.70	0.63	0.49	2.79	3
			9.70	3.13	0.49	1.42	0.70	0.49	0.86	4
				11.28	0.58	1.69	0.83	0.58	1.02	5
					5.53	1.96	0.32	0.23	0.39	6
						12.20	0.93	0.65	1.14	7
							11.00	1.76	1.15	8
								9.20	0.90	9
									15.20	10

第5.2表 故障Aに対する合着判定

	発電機グループ	部分的リアプノフ関数の値	結果*
1	4, 5	0.88×10^{-4}	○
2	4, 5, 7	0.13×10^{-3}	○
3	4, 5, 7, 6	0.67×10^{-2}	×
4	8, 9	0.24×10^{-4}	○

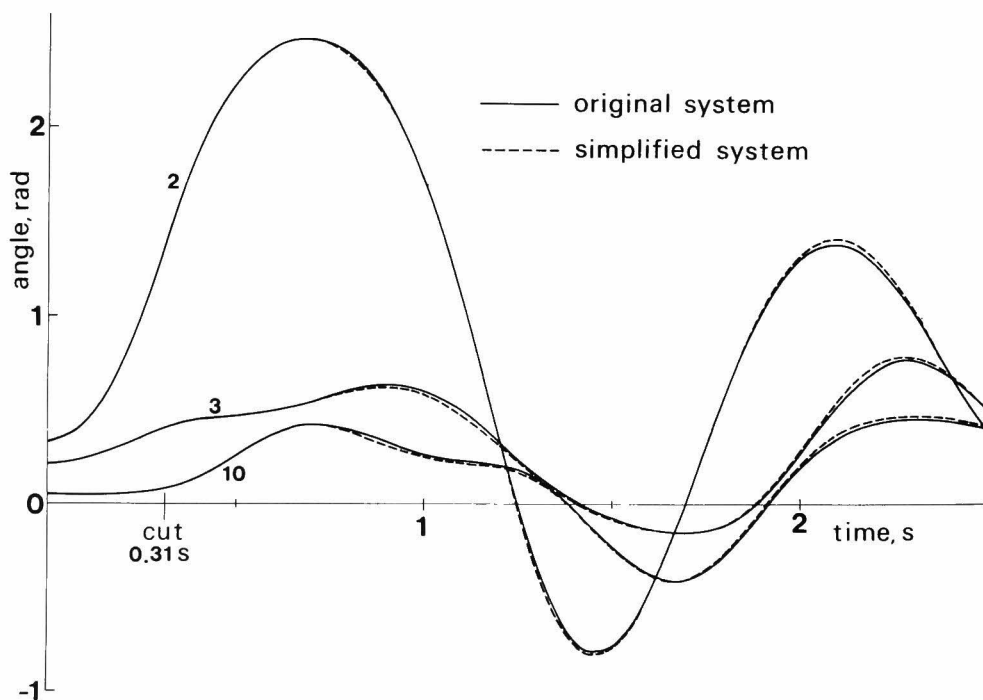
*系統全体のリアプノフ関数の値は 4.465

○：縮約可能， ×：縮約不可

まず、伝達アドミタンスの値が最大の発電機対No.4とNo.5をとりあげる。 Y_{thr} として、ステップ1で用いたのと同じ値1 p.u.を採用すると、この場合アドミタンスの値3.13p.u.で Y_{thr} よりも大きいので、この対に対する部分的リアプノフ関数の値を計算する。リアプノフ関数の計算は、限界しゃ断時間近くの0.31秒において行なう。 V_{thr} としては、系統全体のリアプノフ関数の値(4.465)の1000分の1を用いる。No.4,5に対するリアプノフ関数の値は V_{thr} よりも小

さいので、No. 4, 5 からのアドミタンスが最大 ($1.69 > Y_{thr}$) の発電機No. 7を加えて、この3機に対する部分的リアプノフ関数の値を計算する。まだ V_{thr} よりも小さいので、No. 4, 5, 7 のグループからのアドミタンスが最大 ($1.96 > Y_{thr}$) の発電機No. 6を加えてリアプノフ関数の値を求める。この時はじめて V_{thr} 以上となるので、No. 6を除いてNo. 4, 5, 7 の3つの発電機で1つの合着グループとする。残るNo. 6, 8, 9のうち、アドミタンス最大 ($1.76 > Y_{thr}$) の発電機No. 8, 9についてリアプノフ関数の値を計算する。 V_{thr} よりも小さいので、次にこの対からのアドミタンス最大の発電機No. 6 (実は唯一の残りの発電機)をとると、アドミタンス値が0.32で Y_{thr} よりも小さいので、No. 8, 9でひとつの合着グループとする。残りはNo. 6ひとつだけなので判定が終了する。この結果、10の発電機が7に縮約される。第5.1図に、0.31秒で故障除去した時の動揺曲線を、原系統と縮約系統の両者について示す。簡略化によって動揺の振幅が幾分大きくなるが、全体としてよく一致していることがわかる。第5.3表はリアプノフ関数による判定を示したものである。この故障の場合、リアプノフ関数による判定が非常に精確で、正しい限界しゃ断時間0.32秒が求まるが、簡略化を行なっても同じ判定結果となることがわかる。

故障Bについても同様に合着判定を行なうと、簡略化の可能性のある発電機No. 2～7のうち、No. 4, 5, 7をひとつにまとめられることがわかる (第5.4表)。簡略化の影響を第5.2図に示す。



第5.1図 10機系統の過渡動揺 (故障A)

第 5.3 表 リアプノフ関数による安定判別 (故障 A)

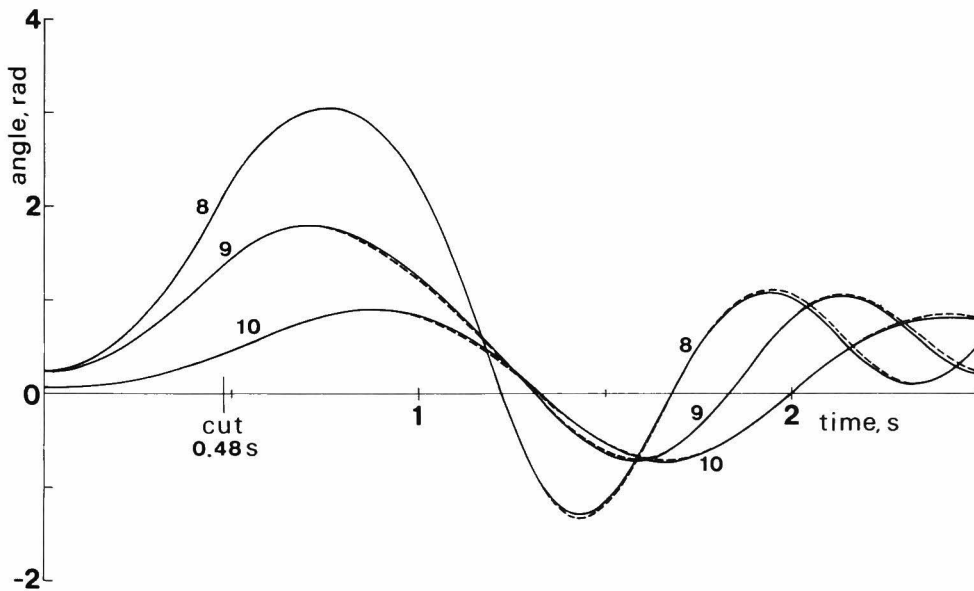
	原 系 統	簡略化系統
V_{cr}	5.015	5.117
0.31 秒	4.465	4.561
0.32 秒	4.867	4.969
0.33 秒	5.292	5.398

第 5.4 表 故障 B に対する合着判定

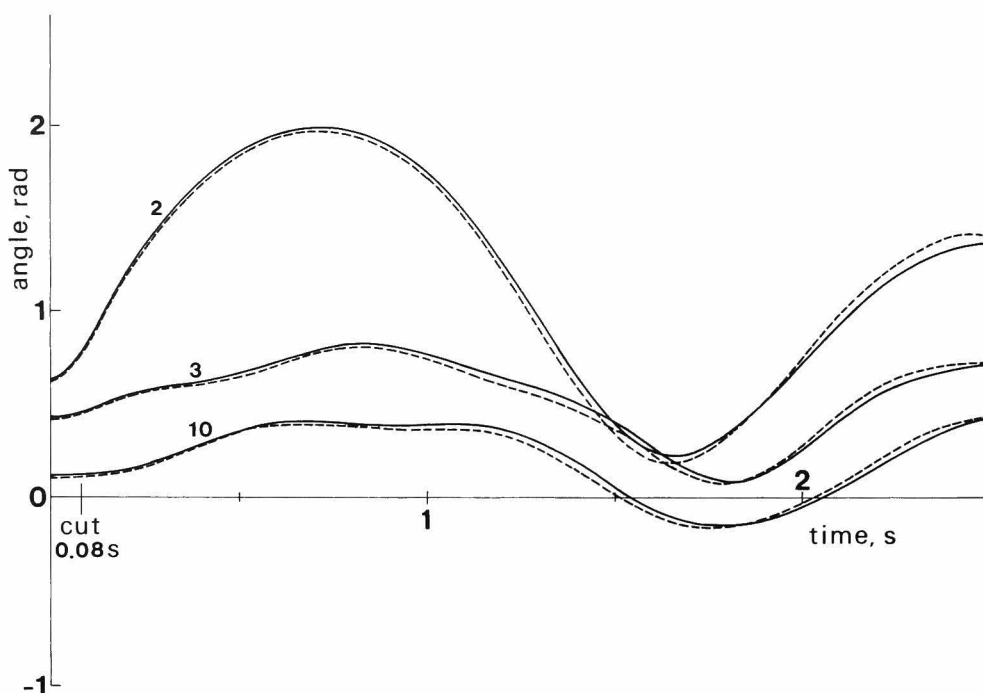
	発電機グループ	部分的リアプノフ関数の値	結果*
1	4, 5	0.24×10^{-3}	○
2	4, 5, 7	0.12×10^{-2}	○
3	4, 5, 7, 6	0.16×10^{-1}	×
4	2, 3	0.22×10^{-1}	×

* 系統全体のリアプノフ関数の値は 10.63

○: 縮約可能, ×: 縮約不可



第 5.2 図 10 機系統の過渡動揺 (故障 B)

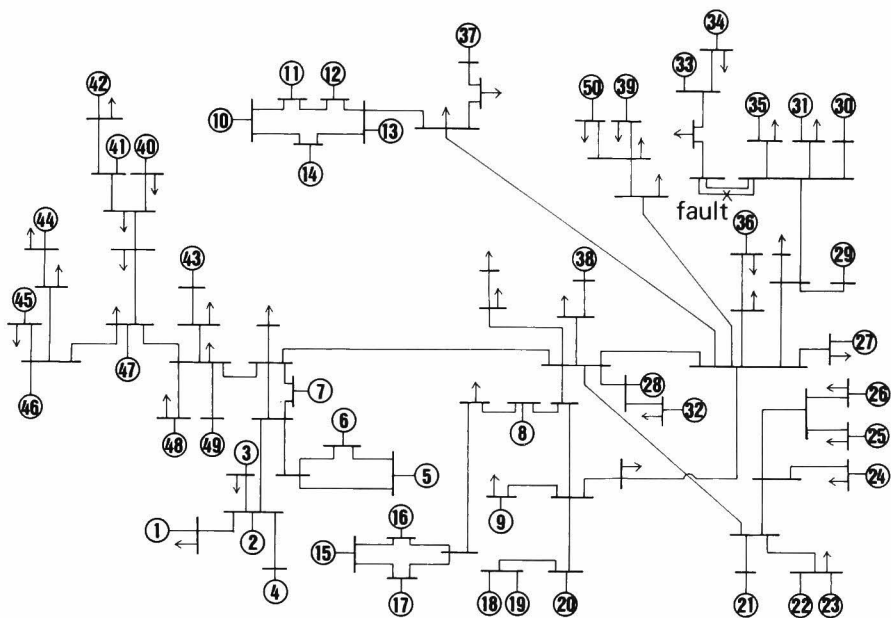


第 5.3 図 10 機系統の過渡動揺（故障 A，全負荷）

第 5.3 図は，発電機出力および負荷の大きさをいままでの 2 倍（全負荷）にした時の，故障 A に対する動揺曲線を示したものである。簡略化系統の場合の合着グループは，第 5.2 表の判定をそのまま用いている。簡略化の影響は第 5.1 図と比較すると大きくなってはいるが，それほど重大なものではなく，また，限界しゃ断時間も簡略化によって変化せず，0.08 秒であった。したがって，負荷状態がある程度変化しても，合着発電機群にはあまり影響がないので，ある運転状態で合着判定を行なっておけば，その結果を他の状態に適用してかなりの精度が得られるものと思われる。

5.3.2 50 機系統

次に，第 5.4 図に示す 50 機系統について簡略化計算を行なう。想定故障は図中の×点における三相短絡であり，故障点からのアドミタンスの大きさが 50 p.u. 以下の 35 発電機を縮約の可能性のあるものとして取り上げる。判定のための部分的リアプノフ関数の計算は，この故障に対する限界しゃ断時間である 0.27 秒で行なった。 V_{thr} は 10 機系の場合と同様，系統全体に対するリアプノフ関数の値の 1000 分の 1 とし， Y_{thr} は 50 p.u. とした。これらの値は簡略化に対する要求の強さによって決めればよい。つまり，大きくまとめて機数をへらしたい時には V_{thr} を大きく Y_{thr} を小さくすればよく，少しの簡略化でよい場合には逆にすればよい。合着性



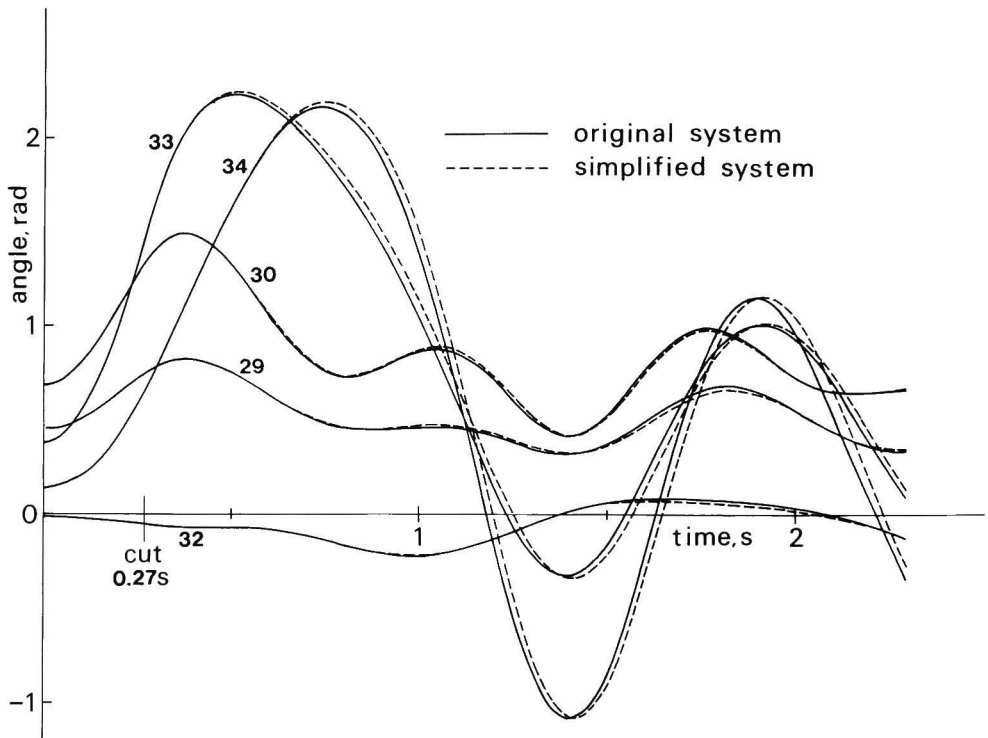
第 5.4 図 例題 50 機系統

第 5.5 表 50 機系統の合着判定 (I)

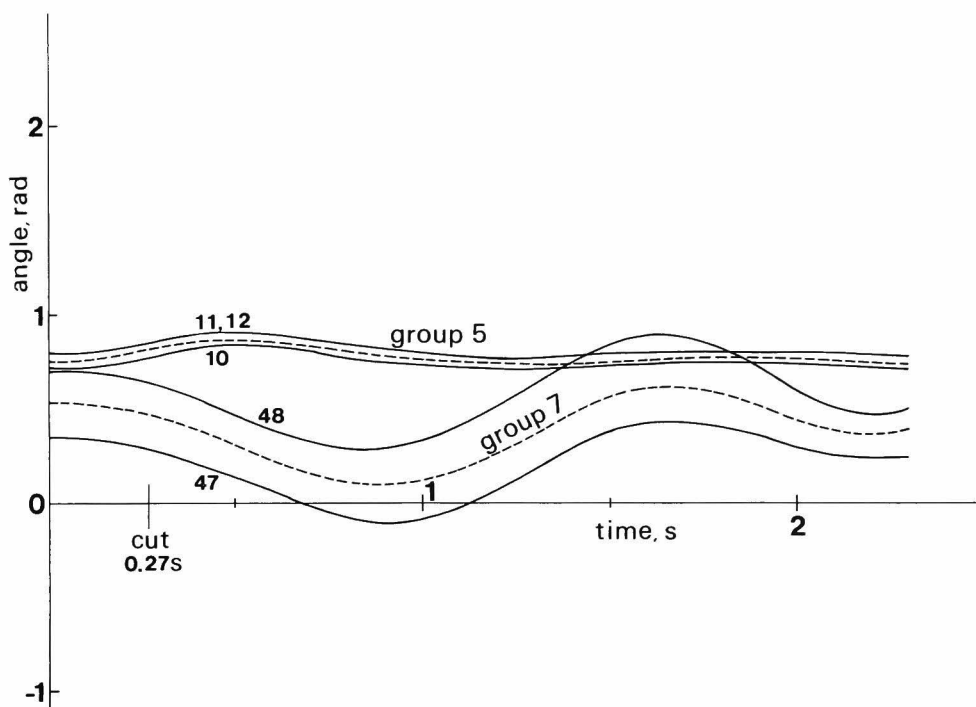
非簡略化グループ	
21, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32,	
33, 34, 35, 36, 49, 50	
合着グループ (0.27 秒における判定)	
1	40, 41
2	44, 45
3	1, 2
4	5, 6, 4
5	10, 12, 11
6	18, 20, 19
7	47, 48
8	22, 25
9	15, 17, 16

の判定結果を第 5.5 表に示す。これによって、35 の発電機が 22 に（全体で 50 機から 37 機に）縮約されることになる。第 5.5 図に、限界しゃ断時間で故障を除去した時の原系統と簡略化系統の両者について、いくつかの発電機の動揺曲線を示す。(a) 図は非縮約グループに属する発電機の動作である。簡略化によって第一動揺が幾分大きくなり、その分だけ時間が遅れた形になるが、動揺の周波数や振幅はほとんど変化せず、簡略化の影響の小さいことがわかる。(b)，(c) 図は合着グループの動作の例を示したものであり、同じ合着グループに属する発電機の動揺曲線が平行に近く合着判定アルゴリズムが妥当であること、等価発電機の動作は縮約前の発電機群の平均的なふるまいをすること、などがわかる。

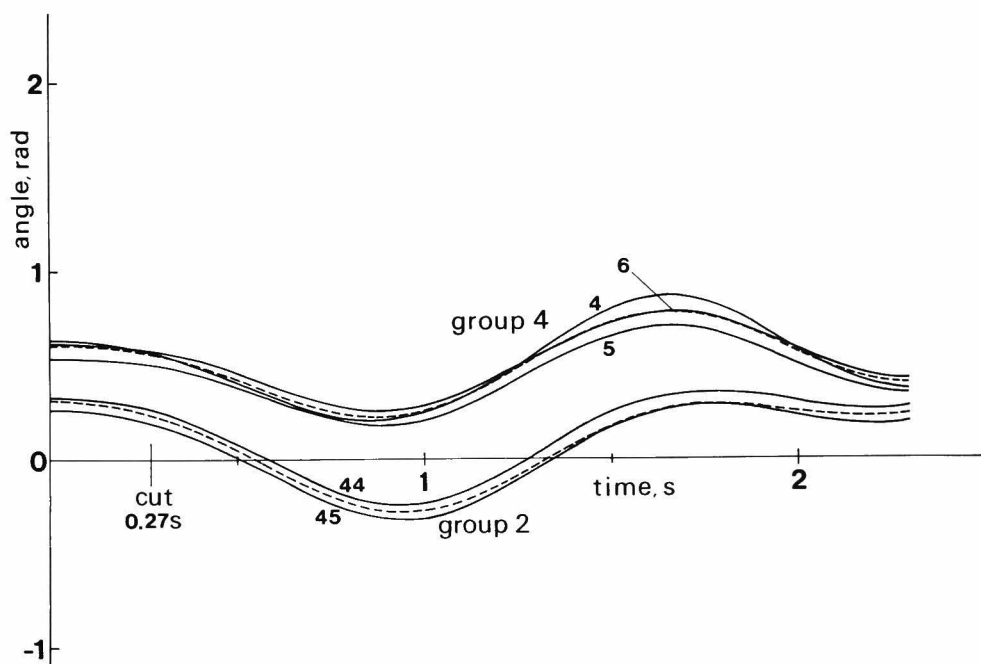
前述のように 0.27 秒のしゃ断時間はこの故障に対する限界しゃ断時間であるので発電機の動揺が大きく、系統簡略化の観点から最もきびしい場合であるといえる。第 5.6 図は 0.1 秒で故障を除去した場合の、非縮約発電機の中のいくつかの動作を示したものである。この図から明らかなように、0.1 秒しゃ断という簡略化からみてよりゆるやかな条件においては、原系統のふるまいを非常によく保っている。



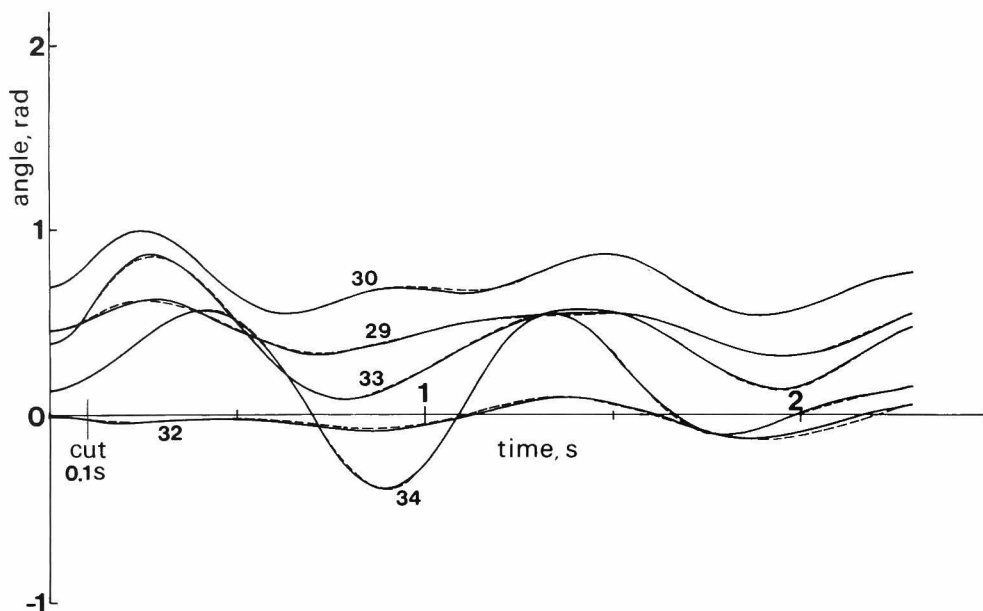
第 5.5 図 50 機系統の過渡動揺 (a)



第 5.5 図 50 機系統の過渡動揺 (b)



第 5.5 図 50 機系統の過渡動揺 (c)



第 5.6 図 50 機系統の過渡動揺 (0.1 秒で故障除去)

以上の計算においては、あらかじめ限界故障除去時間を求め、その時刻におけるリアプノフ関数の値を用いて合着判定を行なったが、実際には限界故障除去時間は前もってわかっているわけではないので、現実のしゃ断時間程度において計算したリアプノフ関数の値を用いて判定を行なえることが必要である。第 5.6 表は 0.1 秒において合着判定した結果を示したものである。これは No. 24 発電機が最後のグループに含まれている点を除けば 0.27 秒で判定した第 5.5 表と全く同じ結果である。したがって、実際のしゃ断時間程度の時刻において判定を行なえることがわかる。

以上の計算は、原系統の故障中の状態について 0.27 秒あるいは 0.1 秒計算を行ない、その時の δ, ω の値を用いてリアプノフ関数を計算して、合着性の判定を行なったものである。

第 5.6 表 50 機系統の合着判定 (Ⅱ)

合着グループ (0.1 秒における判定)	
1	40, 41
2	44, 45
3	1, 2
4	5, 6, 4
5	10, 12, 11
6	18, 20, 19
7	47, 48
8	15, 17, 16
9	24, 25, 22

5.2.3 のアルゴリズムの項で述べたように加速力が故障中の短時間一定であるとみせるならば、故障中の δ, ω を故障前の δ_0, ω_0 と故障発生時の角加速力 a とを用いて、

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \delta_0 + at^2/2 \\ \omega &= \omega_0 + at \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

のように簡単に計算することができるので、原系統の動作は全く計算する必要がなくなる。第5.7表はこのようにして求めた0.1秒後および0.27秒後の δ, ω の近似値を、任意に選んだ4つの発電機について正しい値と比較したものである。故障点に近いNo.30の発電機では少し近似度が悪いが、他の発電機については非常によくあっている。第5.8表はこの δ, ω の近似値を用いて合着判定を行なった結果を示したものである。これを第5.5表、第5.6表と比較すると、0.1秒では δ, ω を正しく計算した場合と全く同じ、0.27秒ではNo.19発電機が第6グループからぬけただけで他は全く同じ結果になっている。このことから、本文で提案したアルゴリズムを近似的に計算した状態に対して適用することにより、系統全体のシミュレーションを行なうことなく合着判定を行ないうることが明らかとなった。

第5.7表 δ, ω の近似計算値

	発電機番号	精 確 な 値		近 似 計 算 値	
		δ (ラジアン)	ω (ラジアン/秒)	δ (ラジアン)	ω (ラジアン/秒)
0.1 秒	10	0.730	0.187	0.731	0.198
	20	0.453	0.203	0.454	0.223
	30	0.812	2.306	0.823	2.688
	40	0.331	-0.192	0.333	-0.194
0.27 秒	10	0.783	0.412	0.793	0.535
	20	0.506	0.368	0.524	0.602
	30	1.330	3.152	1.668	7.257
	40	0.270	-0.555	0.272	-0.525

第 5.8 表 50 機系統の合着判定 (Ⅲ)

合 着 グ ル ー プ		
	0.27 秒における近似的判定	0.1 秒における近似的判定
1	40, 41	40, 41
2	44, 45	44, 45
3	1, 2	1, 2
4	5, 6, 4	5, 6, 4
5	10, 12, 11	10, 12, 11
6	18, 20	18, 20, 19
7	47, 48	47, 48
8	22, 25	15, 17, 16
9	15, 17, 16	24, 25, 22

第6章 リアプノフ直接法による動態安定度の解析

近年、SCR などを用いた応答の速い励磁系が過渡安定度向上対策として用いられるようになり、第一動揺に対する過渡安定度は格段に改善された。しかし、第二動揺以降の減衰が悪く、最悪の場合には第二波以後で脱調に至ることもあるということが明らかとなった。このための対策として、周波数変化、角速度変化、出力電力変化などの端子電圧以外の付加的な信号を AVR 入力として用いて、小じょう乱に対する安定度をよくするという方法がとられている（PSS : Power System Stabilizer）。このように、AVR や調速機などの制御系を考慮した定態安定度（動態安定度）の精密な解析は以前にも増して重要となってきた。

本章ではリアプノフ直接法の動態安定度解析への適用について、一機無限大母線系統を例にとって述べる。まず 6.2 においては、線形定常システムに対するリアプノフの定理より動態安定度の指標を導びく。さらに 6.3 では、リアプノフ直接法にもとづく動態安定度の感度解析について検討する。

6.1 動態安定度解析のための系統のモデル化²⁸⁾

これまで検討を行ってきた過渡安定度が比較的大きなじょう乱後、2 - 3 秒の短時間における安定性を問題とするのに対して、動態安定度は制御系の効果を含んだ定常状態における安定性をその対象とする。よって、制御系はもちろんのこと、同期機も励磁巻線の動特性や制動巻線などを考慮して詳細に表現する必要がある。

6.1.1 同期機

三相平衡の運転状態を想定しているので、零相を考慮する必要はない。

パークの変換は次のような式であらわされる。

$$\mathbf{w}_d = \mathbf{P}(\theta) \cdot \mathbf{w}_a \quad (6.1)$$

$$\mathbf{P}(\theta) = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ -\sin \theta & -\sin(\theta - 2\pi/3) & -\sin(\theta + 2\pi/3) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

ここで \mathbf{w}_d はパークの量の列ベクトルであり、 \mathbf{w}_a は三相量の列ベクトルである。同期機の方程式としては、直軸、横軸にひとつずつの制動巻線を有する Shacksaft のモデルを用いる。²⁹⁾

直軸鎖交磁束

$$\psi_{fd} = x_{ffd} \cdot i_{fd} - x_{ad} i_d + x_{fkd} i_{kd} \quad (6.3)$$

$$\psi_d = x_{ad} i_{fd} - x_d i_d + x_{ad} i_{kd} \quad (6.4)$$

$$\psi_{kd} = x_{fkd} i_{fd} - x_{ad} i_d + x_{kkd} i_{kd} \quad (6.5)$$

横軸鎖交磁束

$$\psi_q = -x_q i_q + x_{aq} i_{kq} \quad (6.6)$$

$$\psi_{kq} = -x_{aq} i_q + x_{kkq} i_{kq} \quad (6.7)$$

直軸電圧

$$v_{fd} = p\psi_{fd}/\omega_0 + r_{fd} i_{fd} \quad (6.8)$$

$$v_d = p\psi_d/\omega_0 - r i_d - \omega\psi_q/\omega_0 \quad (6.9)$$

$$0 = p\psi_{kd}/\omega_0 + r_{kd} i_{kd} \quad (6.10)$$

横軸電圧

$$v_q = p\psi_q/\omega_0 - r i_q + \omega\psi_d/\omega_0 \quad (6.11)$$

$$0 = p\psi_{kq}/\omega_0 + r_{kq} i_{kq} \quad (6.12)$$

ただし、この章では時間を $2\pi f_0$ 倍して用いるので $\omega_0 = 1$ になる。

以上の式は、固定子巻線と回転子巻線間の相互インダクタンスが各軸につきそれぞれ等しくなるように選んだ単位法によって表わされており、相互インダクタンス、自己インダクタンスおよび漏れインダクタンスの間には次のような関係が成立する。

$$\begin{aligned} x_{ffd} &= x_{ad} + x_{fl} \\ x_d &= x_{ad} + x_{al} \\ x_{kkd} &= x_{ad} + x_{kd1} \\ x_q &= x_{aq} + x_{al} \\ x_{kkq} &= x_{aq} + x_{kq1} \end{aligned} \quad (6.13)$$

エアギャップトルク

$$T_e = \psi_d i_q - \psi_q i_d \quad (6.14)$$

無効電力

$$Q = v_q i_d - v_d i_q \quad (6.15)$$

端子電圧

$$v_t^2 = v_d^2 + v_q^2 \quad (6.16)$$

回転子の運動方程式

$$Mp\omega = T_M - T_e \quad (6.17)$$

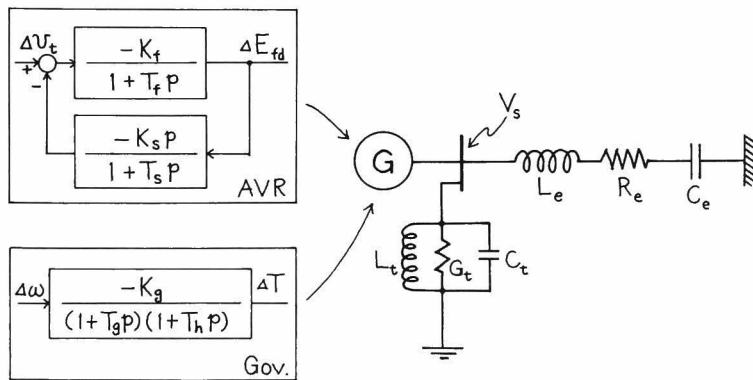
回転角

$$\theta = \omega_0 t + \delta \quad (6.18)$$

$$p\theta = \omega_0 + p\delta = \omega \quad (6.19)$$

6.1.2 AVR と調速機

増幅器の飽和や整流器の非線形特性を無視し，AVR と調速機の特性は次式で記述されるものと仮定する。（第 6.1 図）



第 6.1 図 例題系統と制御系

AVR

$$\Delta E_{fd} = \frac{-K_f}{1 + T_f p} (\Delta v_t - \Delta v_s) \quad (6.20)$$

$$\Delta v_s = \frac{-K_s p}{1 + T_s p} \Delta E_{fd} \quad (6.21)$$

調速機

$$\Delta T_M = \frac{-K_g}{(1 + T_g p)(1 + T_h p)} \Delta \omega \quad (6.22)$$

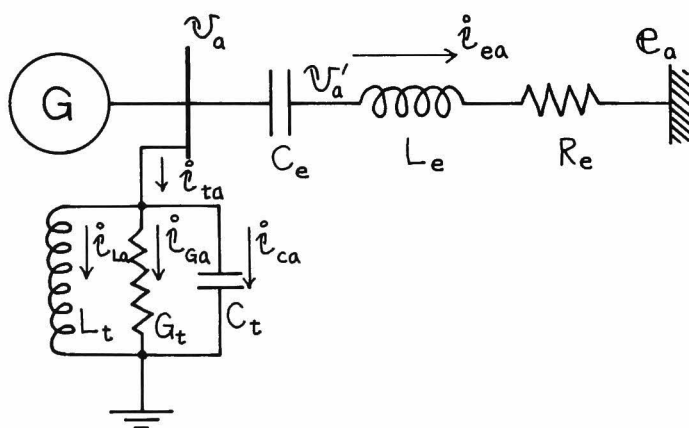
6.1.3 送電線と定インピーダンス負荷

第 6.2 図に示すような直列コンデンサと三相平衡送電線を通して無限大母線につながる同期発電機が、端子に定インピーダンス負荷をもつ場合について端子条件を求めると、微小動揺時の特性は次のように行列表示することができる。（付録 I 参照）

$$\begin{aligned} (D_t + D_e^{-1}) \Delta v_d = & \Delta i_d + (a_t E v_{d0} - a_e D_e^{-1} E i_{ed0}) \Delta \omega \\ & + D_e^{-1} T e_{d0} \Delta \delta \end{aligned} \quad (6.23)$$

ただし

$$D_t = \begin{bmatrix} G_t & -C_t + 1/L_t \\ C_t - 1/L_t & G_t \end{bmatrix}$$



第 6.2 図 例題一機無限大母線系統

$$D_e = \begin{bmatrix} R_e & -L_e + 1/C_e \\ L_e - 1/C_e & R_e \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} -\sin \delta_0 & \cos \delta_0 \\ -\cos \delta_0 & -\sin \delta_0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_t = C_t + 1/L_t$$

$$a_e = L_e + 1/C_e$$

6.1.4 微小動揺に対する線形化方程式

同期機に関する(6.3)～(6.19)式および制御系の特性式(6.20)～(6.22)式を微小動揺に対して書き換えて整理し、(6.23)式と組み合わせることによって、系統の微小動揺は次の2式によって表わされる。(付録J 参照)

$$p\mathbf{x} = A_1\mathbf{x} + A_2\mathbf{y} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{y} = A_3\mathbf{x} \quad (6.25)$$

ただし

$$\mathbf{x} = (\Delta\psi_{fd} \Delta\psi_d \Delta\psi_{kd} \Delta\psi_q \Delta\psi_{kq} \Delta\omega \Delta\delta \Delta E_{fd} \Delta v_s \Delta T_a \Delta T_M)' \quad (6.26)$$

$$\mathbf{y} = (\Delta\psi_{ad} \Delta\psi_{aq} \Delta i_d \Delta i_q \Delta v_d \Delta v_q)' \quad (6.27)$$

(6.24), (6.25) 式より

$$p\mathbf{x} = A\mathbf{x} \quad (6.28)$$

ただし $A = A_1 + A_2 A_3$

A_1, A_2, A_3, A の次数はそれぞれ $(11 \times 11), (11 \times 6), (6 \times 11), (11 \times 11)$ 次となる。

6.2 リアプノフ直接法による動態安定度の指標

6.2.1 状態変数の積分二乗偏差による解析

線形定常系に対する以下のような定理を用いて、各状態変数の積分二乗偏差による動態安定度の解析を行なう。

定理 1³⁰⁾

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ が大局的一様漸近安定となるための必要十分条件は、すべての対称で有界正定な \mathbf{Q} に対し、

$$\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (6.29)$$

をみたす対称有界正定行列 \mathbf{P} が存在することである。

定理 2³¹⁾

行列 \mathbf{Q} が正定または半正定で、かつ系が大局的一様漸近安定であれば、(6.29) 式で定まる行列 \mathbf{P} に対して

$$(\mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x})_{t=0} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x}) dt \quad (6.30)$$

がなりたう。

したがって、(6.29) 式よりある正定または半正定行列 \mathbf{Q} に対して行列 \mathbf{P} を求めれば、(6.30) 式より \mathbf{x} の初期値 $(\mathbf{x})_{t=0}$ のみによって右辺の積分の値を計算することができる。たとえば、ひとつの状態変数 x_r に初期値 1 を与え、他はすべて 0 とすると、この初期値に対する (6.30) 式右辺の半無限積分の値は、行列 \mathbf{P} の r 番目の対角要素 p_{rr} で与えられる。

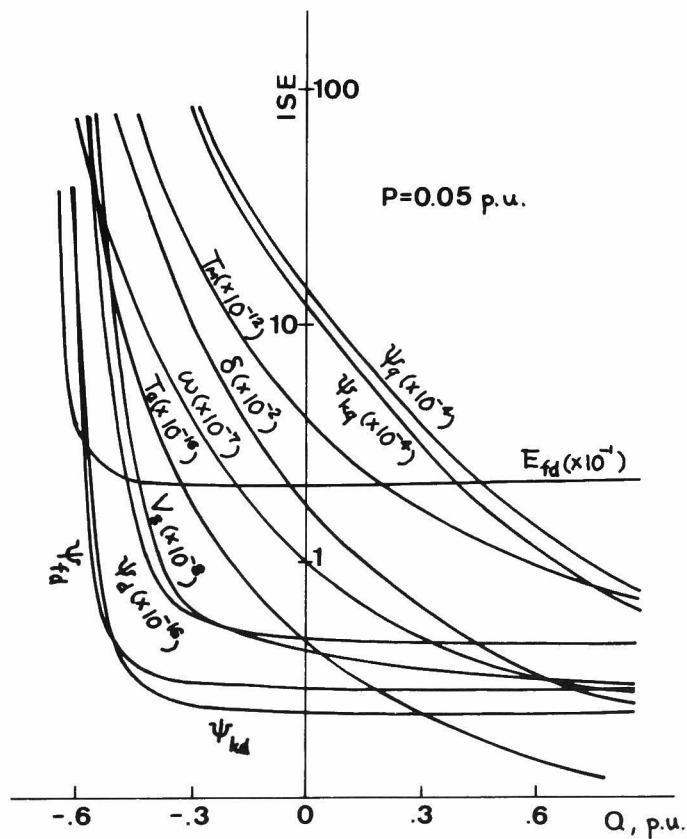
各状態変数の積分二乗偏差を求めるには、まず行列 \mathbf{Q} として、その状態変数に対応する対角要素だけが 1 で他の要素はすべて 0 の行列を選ぶ。次に、この行列 \mathbf{Q} に対する行列 \mathbf{P} を (6.29) 式を解いて求める。 \mathbf{P} が求まれば (6.30) 式左辺より任意の初期値に対する積分二乗偏差を計算することができる。

上記の方法によって、前節で示した系統に対する各状態変数の積分二乗偏差を計算した。計算に用いた定数は第 6.1 表のとおりである。これらの値は文献 (29) と (31) からとっている。系統の初期条件は発電機の有効電力、無効電力および端子電圧を与えて求めている。よって、無限大母線の電圧は初期条件を求めてから決定される。また、各変数の初期値は ΔE_{fd} だけを 1 とし、他はすべて 0 としている。この場合、系統方程式が線形であるので解は平衡点からの変動の大きさに無関係であり、 ΔE_{fd} の初期値の大きさは任意でよい。

第 6.3 図は発電機の無効電力 Q を変えたときの各状態変数の積分二乗偏差の変化を示す。積分二乗偏差は過渡応答曲線の二乗偏差の面積にあたるものであるから、この値が小さいほど微小動揺特性がよい。第 6.3 図よりすべての状態変数の積分二乗偏差の変化の傾向が 2 つのグル

第 6.1 表 発電機, 系統および制御系の定数

$T_f = 2.00 \text{ sec}$	$K_f = 40$	$L_t = 1000$	$L_e = 0.2$
$T_s = 2.00 \text{ sec}$	$K_s = 0.01$	$G_t = 0.005$	$R_e = 0.01$
$T_g = 0.80 \text{ sec}$	$K_g = 0.04$	$C_t = 0.001$	
$T_h = 0.25 \text{ sec}$	$M = 10 \text{ sec}$		$v_{sp} = 1.1$
$r_{fd} = 0.00107$	$r = 0.002$	$r_{kd} = 0.00318$	
$r_{kq} = 0.00318$	$k_s = 1.0$		
$x_{ad} = 1.86$	$x_{aq} = 1.86$	$x_{fl} = 0.14$	
$x_{al} = 0.14$	$x_{kd} = 0.04$	$x_{kq} = 0.04$	



第 6.3 図 励磁電圧のステップ変化に対する各状態変数の積分二乗偏差

ープに分けられることがわかる。つまり、 Q の減小(進み無効電力の増大)とともに除々に増加するグループ($\psi_q, \psi_{kq}, T_a, T_M, \delta, \omega$)と、ある Q の値から急激に増加するグループ($\psi_d, \psi_{fd}, \psi_{kd}, v_s, E_{fd}$)とである。第1のグループは運動方程式、トルク、調速機に主として関係する変数であり、第2のグループは、誘起電圧、AVRに関する変数である。これは電圧の動揺が動態安定度の限界近くで急に大きくなることによるものである³²⁾

6.2.2 リアプノフ関数による動態安定度の指標

定理1の(6.29)式によって行列 P が求まると

$$V = \mathbf{x}' P \mathbf{x} \quad (6.31)$$

が系 $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ に対するリアプノフ関数となる。なぜならば、 V は正定であり、

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\mathbf{x}}' P \mathbf{x} + \mathbf{x}' P \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}' A' P \mathbf{x} + \mathbf{x}' P A \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}' (A' P + P A) \mathbf{x} \\ &= -\mathbf{x}' Q \mathbf{x} \end{aligned} \quad (6.32)$$

となって \dot{V} が負定となるからである。この V を、状態空間における距離の尺度とみなして、系が平衡点に近づく割合を評価する指標を次のように定義することができる³³⁾

$$T = \max_{\mathbf{x}} \left[-\frac{V(\mathbf{x})}{\dot{V}(\mathbf{x})} \right] \quad (6.33)$$

あるいは P と Q を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} T &= \max_{\mathbf{x}} \left[\frac{\mathbf{x}' P \mathbf{x}}{\mathbf{x}' Q \mathbf{x}} \right] \\ &= \max_{\mathbf{x}} [\mathbf{x}' P \mathbf{x} ; \mathbf{x}' Q \mathbf{x} = 1] \end{aligned} \quad (6.34)$$

Γ をラグランジュ乗数として次のような関数を考える。

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}' P \mathbf{x} - \Gamma \mathbf{x}' Q \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}' (P - \Gamma Q) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (6.35)$$

$F(\mathbf{x})$ は $(P - \Gamma Q) \mathbf{x} = \mathbf{0}$ のとき最大で、このときの \mathbf{x} を \mathbf{x}^* と表わすと、

$$\mathbf{x}^{*'} P \mathbf{x}^* = \Gamma \mathbf{x}^{*'} Q \mathbf{x}^* = \Gamma > 0$$

となり、これは Γ が最大の時に最大である。しかるに、 $(P - \Gamma Q) \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ より、 Γ は $Q^{-1}P$ の固有値である。したがって、

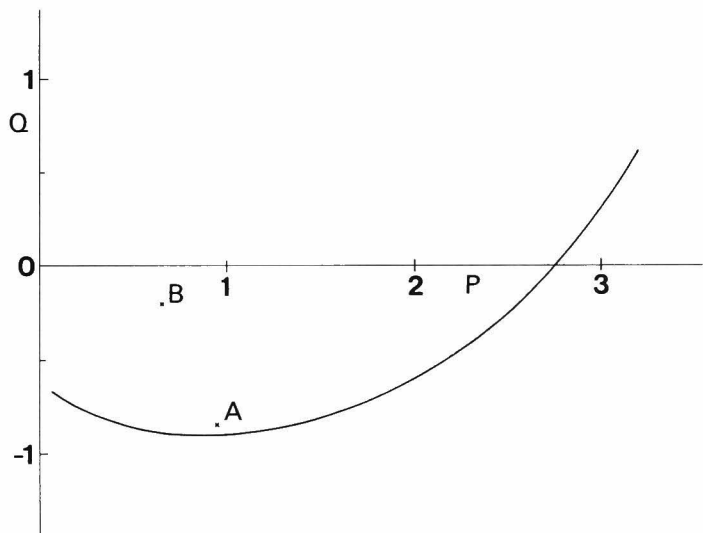
$$T = \max[Q^{-1}P \text{ の固有値}] \quad (6.36)$$

として容易に T を求めることができる。

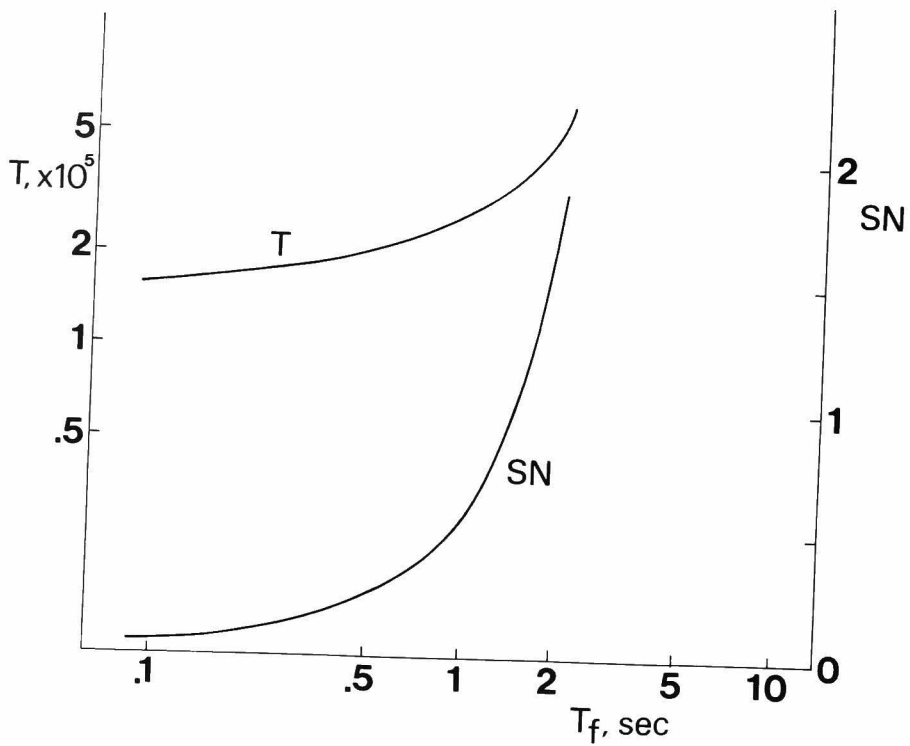
$V(x)$ は状態空間における平衡点から動作点までの距離とみなすことができ、また $\dot{V}(x)$ は動作点が平衡点に近づく速度を示すものと考えることができるので、 T はリアプノフ関数 $V(x)$ が状態空間におけるある領域にわたって変化したときの最大時定数とみなすことができる。したがって、 T の値が小さいほど系は安定であるといえる。

6.2.1 と同じ一機無限大母線系について、第 6.4 図の $P-Q$ 平面上に示した 2 つの運転点において、AVR 定数の変化に対する指標 T の変化を求めた。動作点 A は $P = 0.95 \text{ p.u.}$, $Q = -0.85 \text{ p.u.}$ (進み力率) であり、安定限界に近い動作点を代表しており、動作点 B は $P = 0.65 \text{ p.u.}$, $Q = -0.2 \text{ p.u.}$ で比較的安定な状態である。

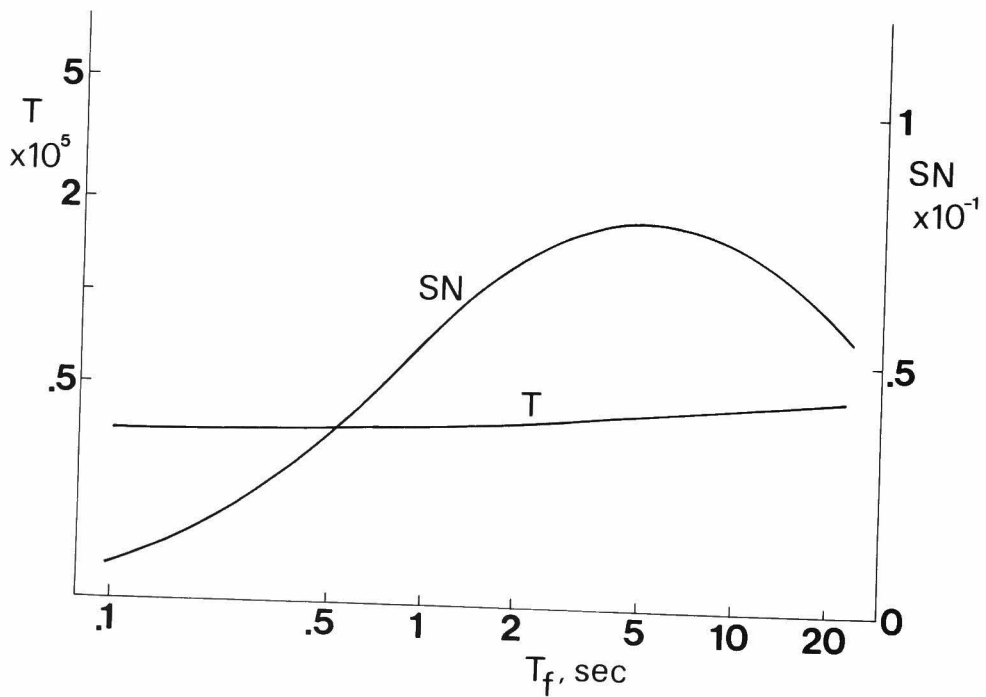
第 6.5, 6.6 図に AVR の時定数 T_f が変化した時の T の変化を示す。いずれの運転点においても T_f が小さいほど T の値が小さく安定度がよいことがわかる。しかし安定限界に近い動作点 A の方が T_f の影響が大きい。これは運転点 B が AVR なし ($T_f \rightarrow \infty$) でも安定であるのに対して、運転点 A は AVR がないと不安定となるためでもある。第 6.7, 6.8 図は AVR のゲイン K_f の変化に対する T の変化を示したものである。 K_f の変化の影響も運転点 A においてより大きく、10 程度が最適なゲインである。運転点 B では 15 位が最適であるが、幅広いゲインに対して良好な応答が得られるということがわかる。



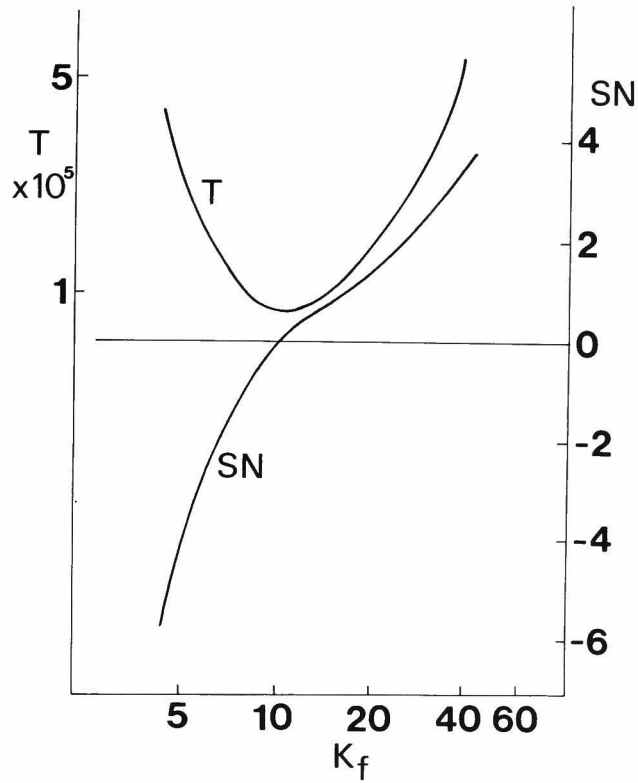
第 6.4 図 $P-Q$ 平面における安定限界と運転点



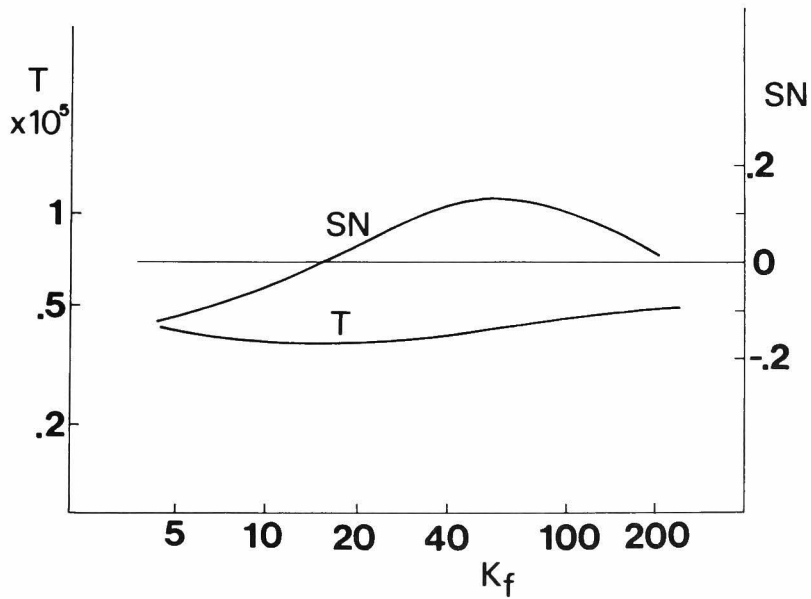
第 6.5 図 T_f の変化に対する指標 T とその感度 SN の変化 (運転点 A)



第 6.6 図 T_f の変化に対する指標 T とその感度 SN の変化 (運転点 B)



第 6.7 図 K_f の変化に対する指標 T とその感度 SN の変化 (運転点 A)



第 6.8 図 K_f の変化に対する指標 T とその感度 SN の変化 (運転点 B)

6.3 動態安定度の感度解析

本節では、系のパラメータ変化に対して動態安定度がどのような変化を受けるかを、6.2.2で定義した指標を用いて感度解析を行なう。

一般に感度 S は、系統に関係するある関数（今の場合は安定度の指標）を F ，変化するパラメータを α として次のように定義される。³⁴⁾

$$S = \frac{\Delta(\ln F)}{\Delta(\ln \alpha)} = \frac{\alpha}{F} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \quad (6.37)$$

これは両対数で α に対する F の変化をプロットした時の、傾きであるといえる。

次に、前節の動態安定度の指標 T の感度を求める。(6.29)式において Q を単位行列にとり、感度を求めたいパラメータ α について微分すると

$$-\frac{\partial A'}{\partial \alpha} P + P \frac{\partial A}{\partial \alpha} + A' \frac{\partial P}{\partial \alpha} + \frac{\partial P}{\partial \alpha} A = 0 \quad (6.38)$$

簡単のために $\partial A / \partial \alpha = A_\alpha$ のように記すると(6.38)式は次のようになる。

$$A' P_\alpha + P_\alpha A = -D \quad (6.39)$$

ただし

$$D \equiv A'_\alpha P + P A_\alpha \quad (6.40)$$

次のような固有ベクトルについての方程式を考える。

$$P Y_i = \lambda_i Y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.41)$$

ここで Y_i は P の固有値 λ_i に対応する正規化された固有ベクトルである。上式を変数 α について微分すると

$$P_\alpha Y_i + P Y_{i\alpha} = \lambda_{i\alpha} Y_i + \lambda_i Y_{i\alpha} \quad (6.42)$$

両辺に Y_i' を左から掛けて簡単にすると、

$$Y_i' P_\alpha Y_i + Y_i' P Y_{i\alpha} = \lambda_{i\alpha} + \lambda_i Y_i' Y_{i\alpha} \quad (6.43)$$

(6.41)式の転置をとって(6.43)式の右辺第2項に代入すると、

$$\lambda_{i\alpha} = Y_i' P_\alpha Y_i \quad (6.44)$$

(6.36)式において Q を単位行列にとっているので、 T は λ_i の最大値となり、

$$T_{\alpha} = Y' P_{\alpha} Y \quad (6.45)$$

ただし、 Y は T に対応する固有ベクトルである。

定義より、パラメータ α に対する T の感度 SN は、

$$SN = \frac{\alpha}{T} \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{\alpha}{T} T_{\alpha} \quad (6.46)$$

したがって (6.45)、(6.46) 式より

$$SN = \frac{\alpha}{T} (Y' P_{\alpha} Y) \quad (6.47)$$

以上より動態安定度の感度解析の手順をまとめると次のようになる。

1. 方程式 (6.29) を行列 P の各要素について解く。もし P が正定であれば、系統は仮定した運転状態と定数の値に関して安定である。
2. 安定度が保証されたので、 P に対応する T と Y を求める。すでに述べた如く T は動態安定度の指標である。
3. A_{α} の要素は A を微分して簡単に求められる。方程式 (6.39) を解いて P_{α} の要素を求める。
4. 動態安定度の指標の感度 SN が (6.47) 式より計算できる。

横軸に α をとり縦軸に SN をとった時に、 SN が 0 となる α の値において T は極値をとり、これが極小であればその α の値が最適な値となる。

6.2.2 と同じ系統、同じパラメータに対して感度解析を行なう。結果は 6.2 の図に示してあり、第 6.5、6.6 図は AVR の時定数 T_f に対する感度を、第 6.7、6.8 図は AVR のゲイン K_f に対する感度を示す。6.2.2 ですでにパラメータの変化に対する T の変化を求めたので、本節の結果はその傾きとなっているわけであるが、感度解析の特長として、ひとつの運転状態における計算のみから、安定度を改善するためにそのパラメータを大きくすべきか小さくすべきかを知ることができる。

第7章 結 論

本論文では先に述べたように、電力系統の安定度問題に対するリアプノフ関数の種々の面からの応用に関する研究を行なった。その結果を要約すればおよそ次のようである。

- (1) リアプノフ関数による安定領域の評価を実際の安定領域に近づけ、安定判別における控え目の程度を小さくするため、リアプノフ関数の級数展開を用いる方法を提案し、一機無限大母線系統に適用して所期の成果を得た。多機系の場合については級数展開の項数が大きくなるため、計算量の減少や必要記憶容量の削減など改善の余地はあるが、理論的には実際の安定領域を求めることができる。
- (2) 過渡安定度の解析に対する応用として、リアプノフ関数を用いた指標を利用して、統計的手法による過渡安定度のオンライン評価法を提案した。この方法により、極めて短時間の計算で過渡安定度の評価を行ないうることが明らかとなった。
- (3) 過渡安定度のオンライン評価法を利用することにより、火力発電所間の経済負荷配分において、燃料費のみでなく過渡安定度をも考慮した最適な負荷配分を行ないえるという結果を得た。
- (4) リアプノフ関数にもとづいた、過渡安定度解析のための電力系統の等価簡略化法を開発した。ここでは合着発電機群の判定と等価回路の導出の両者にリアプノフ関数を応用した。特に前者の合着発電機群の判定は、従来簡略化前の系統の過渡計算を長時間行なうことによって行なわれていたが、リアプノフ関数を用いることにより、短時間の計算で判定を可能とするアルゴリズムを確立した。計算例として10機系ならびに50機系に適用して合着発電機群の判定、等価回路の作成を行ない、原系統と簡略化系統の過渡動揺を比較した。その結果、本論文で提案した合着発電機群判定法により合着発電機群が適切に求められること、簡略化系統は原系統の特性をよく保存していることなどが確認された。
- (5) 動態安定度に対する応用として、線形系に対するリアプノフ関数を用いて、状態変数の積分二乗偏差による動態安定度の解析を行ない、同期発電機の微小動揺特性に影響を与える主な2つのループ、つまり、トルク、調速機、運動方程式のループとAVR、誘起電圧のループを明らかにした。
- (6) リアプノフ関数による動態安定度の指標を用いて、制御系のパラメータ変化に対する感度解析を行なった。これにより、動態安定度よりみた最適なパラメータの決定を容易にした。

謝 辞

本研究を遂行するにあたり、懇切なる御指導、御教示を賜りました林宗明教授、上之園親佐教授に深甚なる謝意を表します。

制御理論に関して貴重な御助言、示唆を賜りました荒木光彦助教授ならびにモスクワエネルギー大学 スハーノフ博士に深謝いたします。

また、発送配電研究室における研究会や卒業研究を通じて御討論、御助言をいただきました庵原悟博士ならびに垣本直人氏はじめ卒業生の皆様に感謝いたします。

付録A 過渡安定度解析に対するリアプノフ直接法の適用

過渡安定度問題とは本質的には、定常状態で運転されている系統にじょう乱が加わった時、故障除去後の系統に安定平衡点が存在するか、存在すれば限界故障除去時間（故障除去後どの発電機も脱調しない最大の故障継続時間）はどの程度か、について検討するものである。したがって解析手法のいかんにかかわらず、次の二つのステップが必要である。

ステップ 1. 故障発生から除去までの計算

ステップ 2. 故障除去後の系統動作の解析

系統が脱調にいたれば、仮定した故障除去時間が限界故障除去時間 t_c より大きく、安定であれば小さいことを意味する。よって、 t_c を求めるためには多数回の過渡計算を必要とする。シミュレーション法では、上記のステップ 1. 2. をともに微分方程式の数値計算によって行なう。したがって多くの計算時間を必要とする。

これに対して、リアプノフ直接法によればステップ 2. がリアプノフの安定判別で置き換えられる。この判別は、まず適切なリアプノフ関数 V を導き、故障除去後の系統の安定平衡点のまわりの安定領域 $V = V_{\min}$ (V のしきい値) を求める。次に、故障中の状態に対して数値計算で微分方程式を解き、 V の値が V_{\min} に等しくなった時間を限界故障除去時間とする。したがって過渡計算は一度行なうだけでよい。

リアプノフ直接法による過渡安定度解析の精度、効率は、次の二点によって特に大きく影響される。

i) リアプノフ関数の性質 与えられた系に対してリアプノフ関数は一意的に決まらないので、安定のための必要十分条件に近い条件を与えるリアプノフ関数、いいかえれば実際の安定領域にできるだけ近い評価を与えるリアプノフ関数を見出す必要がある。

ii) しきい値の決定 前述のリアプノフ関数のしきい値 V_{\min} は、第 2 章で導くエネルギー積分によるリアプノフ関数に対しては、すべての不安定平衡点における V の値の最小値で与えられる。しかるに、不安定平衡点の数は系統につながる発電機数の増加とともに急激に増えるので、短時間でしきい値を求める方法が必要である。

付録B エネルギー積分によるリアプノフ関数の導出

B-1 V_1 の導出

(2.1) 式の系統方程式で、制動を無視すると、

$$M_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} = P_{mi} - \sum_{j=1}^n E_i E_j [G_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)] \quad (B.1)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

n 個の (B.1) 式からあらゆる 2 つの方程式の対 [$n(n-1)/2$ 組] をとれば、 n 機系に対する相対的な運動の方程式が得られる。つまり、(B.1) の i 番目の式に M_k をかけ、 k 番目の式に M_i をかけて差をとると、

$$M_i M_k \ddot{\delta}_{ik} = M_k P_{mi} - M_i P_{mk} - M_k P_{ei} + M_i P_{ek} \quad i > k \quad (B.2)$$

ただし、 $\delta_{ik} = \delta_i - \delta_k$

$$P_{ei} = \sum_{j=1}^n E_i E_j [G_{ij} \cos \delta_{ij} + B_{ij} \sin \delta_{ij}]$$

(B.2) 式の両辺に $\dot{\delta}_{ik}$ をかけ、時間について積分し、 $n(n-1)/2$ 個すべての式の和をとったものがエネルギー積分と呼ばれる。

まず、3 機系の場合について考えると、相対的な運動の方程式は $3 \times (3-1)/2 = 3$ 個あり、それらは次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} M_1 M_3 \ddot{\delta}_{31} &= M_1 P_{m3} - M_3 P_{m1} - M_1 P_{e3} + M_3 P_{e1} \\ M_1 M_2 \ddot{\delta}_{21} &= M_1 P_{m2} - M_2 P_{m1} - M_1 P_{e2} + M_2 P_{e1} \\ M_2 M_3 \ddot{\delta}_{32} &= M_2 P_{m3} - M_3 P_{m2} - M_2 P_{e3} + M_3 P_{e2} \end{aligned} \right\} \quad (B.3)$$

(B.3) 式のそれぞれに $\dot{\delta}_{31}$, $\dot{\delta}_{21}$, $\dot{\delta}_{32}$ を掛け、時間について積分すると

$$\left. \begin{aligned} M_1 M_3 \dot{\delta}_{31} \dot{\delta}_{31} &= (M_1 P_{m3} - M_3 P_{m1}) \dot{\delta}_{31} \\ &\quad - M_1 [E_3^2 G_{33} + E_1 E_3 (G_{13} \cos \delta_{31} + B_{13} \sin \delta_{31}) \\ &\quad + E_2 E_3 (G_{23} \cos \delta_{32} + B_{23} \sin \delta_{32})] \dot{\delta}_{31} \\ &\quad + M_3 [E_1^2 G_{11} + E_1 E_3 (G_{13} \cos \delta_{13} + B_{13} \sin \delta_{13}) \\ &\quad + E_1 E_2 (G_{12} \cos \delta_{12} + B_{12} \sin \delta_{12})] \dot{\delta}_{31} \\ M_1 M_2 \dot{\delta}_{21} \dot{\delta}_{21} &= (M_1 P_{m2} - M_2 P_{m1}) \dot{\delta}_{21} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -M_1 [E_2^2 G_{22} + E_1 E_2 (G_{12} \cos \delta_{21} + B_{12} \sin \delta_{21}) \\
& + E_2 E_3 (G_{23} \cos \delta_{23} + B_{23} \sin \delta_{23})] \dot{\delta}_{21} \\
& + M_2 [E_1^2 G_{11} + E_1 E_2 (G_{12} \cos \delta_{12} + B_{12} \sin \delta_{12}) \\
& + E_1 E_3 (G_{13} \cos \delta_{13} + B_{13} \sin \delta_{13})] \dot{\delta}_{21} \\
M_2 M_3 \ddot{\delta}_{32} \dot{\delta}_{32} = & (M_2 P_{m3} - M_3 P_{m2}) \dot{\delta}_{32} \\
& - M_2 [E_3^2 G_{33} + E_2 E_3 (G_{23} \cos \delta_{32} + B_{23} \sin \delta_{32}) \\
& + E_1 E_3 (G_{13} \cos \delta_{31} + B_{13} \sin \delta_{31})] \dot{\delta}_{32} \\
& + M_3 [E_2^2 G_{22} + E_2 E_3 (G_{23} \cos \delta_{23} + B_{23} \sin \delta_{23}) \\
& + E_1 E_2 (G_{12} \cos \delta_{21} + B_{12} \sin \delta_{21})] \dot{\delta}_{32}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
M_1 M_3 \ddot{\delta}_{31}^2 / 2 = & (M_1 P_{m3} - M_3 P_{m1} - M_1 E_3^2 G_{33} + M_3 E_1^2 G_{11}) \dot{\delta}_{31} \\
& - M_1 E_1 E_3 (G_{13} \sin \delta_{31} - B_{13} \cos \delta_{31}) \\
& - M_1 \int_{t_0}^t E_2 E_3 (G_{23} \cos \delta_{32} + B_{23} \sin \delta_{32}) \dot{\delta}_{31} dt \\
& + M_3 E_1 E_3 (G_{13} \sin \delta_{31} + B_{13} \cos \delta_{31}) \\
& + M_3 \int_{t_0}^t E_1 E_2 (G_{12} \cos \delta_{12} + B_{12} \sin \delta_{12}) \dot{\delta}_{31} dt \\
M_1 M_2 \ddot{\delta}_{21}^2 / 2 = & (M_1 P_{m2} - M_2 P_{m1} - M_1 E_2^2 G_{22} + M_2 E_1^2 G_{11}) \dot{\delta}_{21} \\
& - M_1 E_1 E_2 (G_{12} \sin \delta_{21} - B_{12} \cos \delta_{21}) \\
& - M_1 \int_{t_0}^t E_2 E_3 (G_{23} \cos \delta_{23} + B_{23} \sin \delta_{23}) \dot{\delta}_{21} dt \\
& + M_2 E_1 E_2 (G_{12} \sin \delta_{21} + B_{12} \cos \delta_{21}) \\
& + M_2 \int_{t_0}^t E_1 E_3 (G_{13} \cos \delta_{13} + B_{13} \sin \delta_{13}) \dot{\delta}_{21} dt \\
M_2 M_3 \ddot{\delta}_{32}^2 / 2 = & (M_2 P_{m3} - M_3 P_{m2} - M_2 E_3^2 G_{33} + M_3 E_2^2 G_{22}) \dot{\delta}_{32} \\
& - M_2 E_2 E_3 (G_{23} \sin \delta_{32} - B_{23} \cos \delta_{32}) \\
& - M_2 \int_{t_0}^t E_1 E_3 (G_{13} \cos \delta_{31} + B_{13} \sin \delta_{31}) \dot{\delta}_{32} dt \\
& + M_3 E_2 E_3 (G_{23} \sin \delta_{32} + B_{23} \cos \delta_{32})
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$+M_3 \int_{t_0}^t E_1 E_2 (G_{12} \cos \delta_{21} + B_{12} \sin \delta_{21}) \dot{\delta}_{32} dt \quad \Bigg|$$

ただし積分の下限 t_0 より生ずる定数は省略してある。

(B.5) 式のうち積分できなかった項を合計すると

$$\begin{aligned} & -M_1 E_2 \dot{E}_3 \int_{t_0}^t [G_{23} \cos \delta_{32} (\dot{\delta}_{31} + \dot{\delta}_{21}) + B_{23} \sin \delta_{32} (\dot{\delta}_{31} - \dot{\delta}_{21})] dt \\ & -M_2 E_1 E_3 \int_{t_0}^t [G_{13} \cos \delta_{31} (\dot{\delta}_{32} - \dot{\delta}_{21}) + B_{13} \sin \delta_{31} (\dot{\delta}_{32} + \dot{\delta}_{21})] dt \\ & +M_3 E_1 E_2 \int_{t_0}^t [G_{12} \cos \delta_{21} (\dot{\delta}_{32} + \dot{\delta}_{31}) + B_{12} \sin \delta_{21} (\dot{\delta}_{32} - \dot{\delta}_{31})] dt \\ = & -M_1 E_2 E_3 \int_{t_0}^t [G_{23} \cos \delta_{32} (\dot{\delta}_{31} + \dot{\delta}_{21}) + B_{23} \sin \delta_{32} \cdot \dot{\delta}_{32}] dt \\ & -M_2 E_1 E_3 \int_{t_0}^t [G_{13} \cos \delta_{31} (\dot{\delta}_{32} - \dot{\delta}_{21}) + B_{13} \sin \delta_{31} \cdot \dot{\delta}_{31}] dt \\ & +M_3 E_1 E_2 \int_{t_0}^t [G_{12} \cos \delta_{21} (\dot{\delta}_{32} + \dot{\delta}_{31}) - B_{12} \sin \delta_{21} \cdot \dot{\delta}_{21}] dt \quad (B.6) \end{aligned}$$

$G_{12}=G_{13}=G_{23}=0$ と仮定すると、(B.6) 式は次のようになる

$$M_1 E_2 E_3 B_{23} \cos \delta_{32} + M_2 E_1 E_3 B_{13} \cos \delta_{31} + M_3 E_1 E_2 B_{12} \cos \delta_{21} \quad (B.7)$$

よって、(B.5) 式の3式を加え、積分できた項の G_{ij} ($i \neq j$) も0とおくと、

$$\begin{aligned} & M_1 M_3 \dot{\delta}_{31}^2 / 2 + M_1 M_2 \dot{\delta}_{21}^2 / 2 + M_2 M_3 \dot{\delta}_{32}^2 / 2 \\ = & (M_1 P_{m3} - M_3 P_{m1} - M_1 E_3^2 G_{33} + M_3 E_1^2 G_{11}) \delta_{31} \\ & + (M_1 P_{m2} - M_2 P_{m1} - M_1 E_2^2 G_{22} + M_2 E_1^2 G_{11}) \delta_{21} \\ & + (M_2 P_{m3} - M_3 P_{m2} - M_2 E_3^2 G_{33} + M_3 E_2^2 G_{22}) \delta_{32} \\ & + (M_1 + M_2 + M_3) \cdot (E_1 E_2 B_{12} \cos \delta_{21} + E_1 E_3 B_{13} \cos \delta_{31} + E_2 E_3 B_{23} \cos \delta_{32}) \quad (B.8) \end{aligned}$$

あるいは、これまで省略してきた積分定数を考慮し n 機について示すと、 V_1 が得られる。

$$\begin{aligned} V_1 = & \sum_{i > k} M_i M_k \omega_{ik}^2 / 2 \\ & - \sum_{i > k} (M_k P_{mi} - M_i P_{mk} - M_k E_1^2 G_{ii} + M_i E_k^2 G_{kk}) (\delta_{ik} - \delta_{ik}^s) \\ & - M_T \sum_{i > k} E_i E_k B_{ki} (\cos \delta_{ik} - \cos \delta_{ik}^s) \quad (V.1) \end{aligned}$$

ただし、 $\omega_{ik} = \dot{\delta}_{ik} = \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_k$

$$M_T = \sum_{i=1}^n M_i$$

$\delta_{ik}^s = \delta_{ik}$ の安定平衡点における値

次に V_1 の時間微分について検討する。

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \sum_{i>k} M_i M_k \omega_{ik} \dot{\omega}_{ik} \\ &\quad - \sum_{i>k} (M_k P_{mi} - M_i P_{mk} - M_k E_i^2 G_{ii} + M_i E_k^2 G_{kk}) \omega_{ik} \\ &\quad + M_T \sum_{i>k} E_i E_k B_{ki} \sin \delta_{ik} \cdot \omega_{ik}\end{aligned}$$

伝達コンダクタンスは無視しうると仮定し、(B. 2) 式を、 $G_{ij} = 0$ ($i \neq j$) として代入すると

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \sum_{i>k} (M_k P_{mi} - M_i P_{mk} - M_k E_i^2 G_{ii} + M_i E_k^2 G_{kk} \\ &\quad - M_k \sum_{j=1, \neq i}^n E_j B_{ij} \sin \delta_{ij} + M_i \sum_{j=1, \neq k}^n E_j B_{kj} \sin \delta_{kj}) \cdot \omega_{ik} \\ &\quad - \sum_{i>k} (M_k P_{mi} - M_i P_{mk} - M_k E_i^2 G_{ii} + M_i E_k^2 G_{kk}) \cdot \omega_{ik} \\ &\quad + M_T \sum_{i>k} E_i E_k B_{ki} \sin \delta_{ik} \cdot \omega_{ik} \\ &= - \sum_{j=1}^n M_j \cdot \left[\sum_{i=1, \neq j}^n E_i E_j B_{ij} \sin \delta_{ij} \cdot \omega_{ij} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{i>k \\ i, k \neq j}} E_i E_k B_{ik} \sin \delta_{ik} \cdot (\omega_{ij} - \omega_{kj}) \right] \\ &\quad + M_T \sum_{i>k} E_i E_k B_{ik} \sin \delta_{ik} \cdot \omega_{ik} \\ &= - \sum_{j=1}^n M_j \cdot \left[\sum_{i=1, \neq j}^n E_i E_j B_{ij} \sin \delta_{ij} \cdot \omega_{ij} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{i>k \\ i, k \neq j}} E_i E_k B_{ik} \sin \delta_{ik} \cdot \omega_{ik} \right] + M_T \sum_{i>k} E_i E_k B_{ik} \sin \delta_{ik} \cdot \omega_{ik} \\ &= - \sum_{j=1}^n M_j \cdot \left[\sum_{i>k} E_i E_k B_{ik} \sin \delta_{ik} \cdot \omega_{ik} \right] \\ &\quad + M_T \sum_{i>k} E_i E_k B_{ik} \sin \delta_{ik} \cdot \omega_{ik} \\ &= 0\end{aligned}\tag{B. 9}$$

したがって、伝達コンダクタンスが無視できるならば、 V_1 はリアプノフ関数となっていることがわかる。

制動を考慮した場合の、 V_1 の時間微分は、

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \sum_{i>k} (M_k P_{mi} - M_i P_{mk} - M_k E_i^2 G_{ii} + M_i E_k^2 G_{kk} \\ &\quad - M_k D_i \omega_i + M_i D_k \omega_k \\ &\quad - M_k \sum_{j=1, \neq i}^n E_i E_j B_{ij} \sin \delta_{ij} + M_i \sum_{j=1, \neq k}^n E_k E_j B_{kj} \sin \delta_{kj}) \cdot \omega_{ik}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i>k} (M_k P_{mi} - M_i P_{mk} - M_k E_i^2 G_{ii} + M_i E_k^2 G_{kk}) \cdot \omega_{ik} \\
& + M_T \sum_{i>k} E_i E_k B_{ki} \sin \delta_{ik} \cdot \omega_{ik} \\
& = \sum_{i>k} (-M_k D_i \omega_i + M_i D_k \omega_k) \cdot \omega_{ik}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

制動が一樣であれば、つまりすべての i について $D_i/M_i = a$ であれば、

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \sum_{i>k} (-M_k a M_i \omega_i + M_i a M_k \omega_k) \cdot \omega_{ik} \\
&= \sum_{i>k} -a M_i M_k \cdot \omega_{ik}^2 \leq 0
\end{aligned}$$

となり、リアプノフ関数の条件を満足していることがわかる。

次に伝達コンダクタンスを含んだ系について V_1 の時間微分を計算すると、

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \sum_{i>k} [M_k P_{mi} - M_i P_{mk} - M_k E_i^2 G_{ii} + M_i E_k^2 G_{kk} \\
& - M_k \sum_{j=1, \neq i}^n E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij} + B_{ij} \sin \delta_{ij}) \\
& + M_i \sum_{j=1, \neq k}^n E_k E_j (G_{kj} \cos \delta_{kj} + B_{kj} \sin \delta_{kj})] \cdot \omega_{ik} \\
& - \sum_{i>k} (M_k P_{mi} - M_i P_{mk} - M_k E_i^2 G_{ii} + M_i E_k^2 G_{kk}) \cdot \omega_{ik} \\
& + M_T \sum_{i>k} E_i E_k B_{ki} \sin \delta_{ik} \cdot \omega_{ik} \\
& = - \sum_{i>k} (M_k \sum_{j=1, \neq i}^n E_i E_j G_{ij} \cos \delta_{ij} \\
& - M_i \sum_{j=1, \neq k}^n E_k E_j G_{kj} \cos \delta_{kj}) \cdot \omega_{ik}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

となり、伝達コンダクタンスが無視できない場合には \dot{V}_1 が正となることがありえる。

B-2 V_2 の導出

(2.2) 式の右边を展開すると (制動は無視)、

$$M_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^n E_i E_j [B_{ij} \sin \delta_{ij}^S + G_{ij} \cos \delta_{ij}^S - B_{ij} \sin \delta_{ij} - G_{ij} \cos \delta_{ij}] \tag{B.12}$$

(B.12) 式を (2.1) 式と比較すると、 P_{mi} が $\sum_{j=1}^n E_i E_j \times [B_{ij} \sin \delta_{ij}^S + G_{ij} \cos \delta_{ij}^S]$ で置き換えられていることがわかる。故に、伝達コンダクタンスを無視することによって、 P_{mi} のうちの $G_{ij} \cos \delta_{ij}^S$ が無視される。この点が V_1 の場合と異なる。前節と同じ方法によるリアプノフ関数は、

$$\begin{aligned}
V_2 &= \sum_{i>k} [M_i M_k \omega_{ik}^2 / 2 - M_T E_i E_k B_{ik} (\cos \delta_{ik} - \cos \delta_{ik}^S) \\
& - (\delta_{ik} - \delta_{ik}^S) M_T E_i E_k B_{ik} \sin \delta_{ik}^S]
\end{aligned} \tag{V.2}$$

次に、 V_2 の時間微分をチェックする。伝達コンダクタンスが0の系について、 V_2 の時間微分を計算すると、

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &= \sum_{i>k} [M_i M_k \omega_{ik} \dot{\omega}_{ik} + M_T E_i E_k B_{ik} \sin \delta_{ik} \cdot \omega_{ik} \\
&\quad - \omega_{ik} M_T E_i E_k B_{ik} \sin \delta_{ik}^s] \\
&= \sum_{i>k} [\omega_{ik} \{M_k \sum_{j=1}^n E_i E_j B_{ij} (\sin \delta_{ij}^s - \sin \delta_{ij}) \\
&\quad - M_i \sum_{j=1}^n E_k E_j B_{kj} (\sin \delta_{kj}^s - \sin \delta_{kj})\} \\
&\quad + M_T E_i E_k B_{ik} \sin \delta_{ik} \cdot \omega_{ik} \\
&\quad - \omega_{ik} M_T E_i E_k B_{ik} \sin \delta_{ik}^s] \quad (B.13)
\end{aligned}$$

V_1 の場合と同様の操作によって $\dot{V}_2 = 0$ となる。したがって、伝達コンダクタンスが無視できる場合には V_2 もリアプノフ関数の条件を満足していることがわかる。

次に、伝達コンダクタンスを含む系について \dot{V}_2 を計算すると、

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &= \sum_{i>k} [\omega_{ik} \{M_k \sum_{j=1}^n E_i E_j (B_{ij} (\sin \delta_{ij}^s - \sin \delta_{ij}) + G_{ij} (\cos \delta_{ij}^s - \cos \delta_{ij})) \\
&\quad - M_i \sum_{j=1}^n E_k E_j (B_{kj} (\sin \delta_{kj}^s - \sin \delta_{kj}) + G_{kj} (\cos \delta_{kj}^s - \cos \delta_{kj}))\} \\
&\quad + M_T E_i E_k B_{ik} \sin \delta_{ik} \cdot \omega_{ik} - \omega_{ik} M_T E_i E_k B_{ik} \sin \delta_{ik}^s] \\
&= \sum_{i>k} [M_k \sum_{j=1}^n E_i E_j G_{ij} (\cos \delta_{ij}^s - \cos \delta_{ij}) \\
&\quad - M_i \sum_{j=1}^n E_k E_j G_{kj} (\cos \delta_{kj}^s - \cos \delta_{kj})] \cdot \omega_{ik} \quad (B.14)
\end{aligned}$$

したがって、伝達コンダクタンスが無視できない場合には \dot{V}_2 は正の値をとりえる。

付録C ポポフの定理によるリアプノフ関数の導出²⁾

ポポフの安定判別定理は、一つの非線形要素を有する系の絶対安定問題を周波数領域において解くために開発されたものであるが、後にアンダーソンによって複数の非線形要素を含む非線形系に適用できるように拡張された。ここでは拡張されたポポフの定理を用いて、多機系統に対するリアプノフ関数を導く。

C-1 ポポフの安定判別³⁷⁾

非線形制御系が非線形要素と線形部分に分離できるものとし、系が自由振動している状態の絶対安定に対するポポフの安定判別条件は以下のようになる。

第C.1図に示す非線形制御系において、 $G(s)$ は線形部分の伝達関数で、 s に関する分母の次数は分子の次数より大きいものとし、すべての極は s 平面の左半平面に分布しているものとする。また、 $\varphi(\varepsilon)$ は非線形要素の入力 ε に対する出力 Y の特性を表わす関数で、第C.2図に示すように、次の条件を満足するものとする。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ 0 \leq \varphi(\varepsilon) / \varepsilon &\leq k \\ (\varepsilon \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (C.1)$$

ここで k は正の実数値とする。もし伝達関数 $G(s)$ の極のうち虚軸上に分布しているものがあれば $\varphi(\varepsilon) = 0$ のとき、たとえば非線形要素が不感帯を有しているような場合、オフセットが残り、絶対安定になり得ない。したがって絶対安定を保証するための制限条件は(C.1)式から

$$\varphi(0) = 0 \quad 0 < \varphi(\varepsilon) / \varepsilon \leq k \quad (\varepsilon \neq 0) \quad (C.2)$$

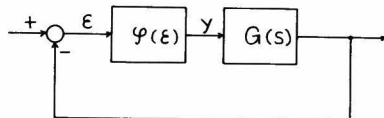
となる。簡単のために(C.1)、(C.2)で表わされる非線形特性を区間 $[0, k]$ 、 $(0, k)$ と表わす。

ポポフによる安定判別条件は系の線形部分の伝達関数の周波数特性 $G(j\omega)$ に着目するものであるが、安定判別が図式的に容易に行なえるために、新しく次のような周波数特性 $G^*(\omega)$ を定義する。すなわち、 $G(j\omega)$ を実数部と虚数部に分け、

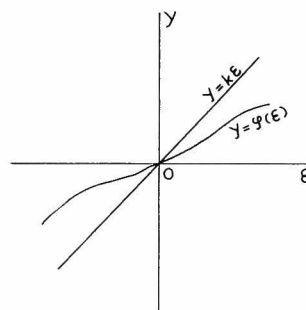
$$X = \operatorname{Re} G(j\omega), \quad Y = \omega \operatorname{Im} G(j\omega) \quad (C.3)$$

とし、

$$G^*(\omega) = X + jY \quad (C.4)$$



第C.1図 非線形要素を含むシステムのブロック図



第C.2図 非線形要素の特性

を考える。ここで R_e は実部を、 I_m は虚部を示す記号である。次に、 $\omega \geq 0$ に対する $G^*(\omega)$ の軌跡を $X-Y$ 平面に描いたものをポポフ軌跡とよぶことにする。

以上の定義のもとでポポフの定理を伝達関数の極の分布に従って分類して表現すると次のようになる。

[1] 伝達関数 $G(s)$ の極がすべて負の実部をもっている場合

区間 $[0, k]$ において系が絶対安定になるための十分条件は

$$R_e(1 + jq\omega)G(j\omega) + \frac{1}{k} > 0 \quad (0 \leq \omega) \quad (C.5)$$

を満足する任意の実数 q が存在することである。

[2] 伝達関数 $G(s)$ の極のうち虚軸上に存在しているものがある場合

区間 $(0, k)$ において系が絶対安定になるための十分条件は (C.5) 式を満足する任意の q が存在し、かつ虚軸上に分布している極は二重以下で、つぎの条件が満足されなければならない。

(a) 一重極が原点に存在している場合

$$I_m G^*(\omega) < 0 \quad (C.6)$$

(b) 一重極が原点以外の虚軸上に存在している場合

この極を $j\omega_0$ とし δ を任意の小さな正数とすると ω が $\omega_0 + \delta \rightarrow \infty \rightarrow 0 \rightarrow \omega_0 - \delta$ と変化するとき $G^*(\omega)$ の軌跡がつねに点 $-\infty + j0$ を左側に見ながら移動しなければならない。ここで $G^*(\infty)$ と $G^*(0)$ の点が一致していない場合には、この軌跡上においてこれら2点間は直線で結ばれているものとする。

(c) 二重極が原点に存在している場合

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} R_e G^*(\omega) = -\infty \quad (C.7)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} I_m G^*(\omega) < 0 \quad (C.8)$$

(d) 二重極が原点以外の虚軸上に存在している場合

この極を $j\omega_0$ とすると

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0-0} R_e G^*(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0+0} R_e G^*(\omega) = -\infty \quad (C.9)$$

かつ δ を任意の小さな正数とすると、

$$I_m G^*(\omega) \begin{cases} > 0 & \omega_0 - \delta < \omega < \omega_0 \\ < 0 & \omega_0 < \omega < \omega_0 + \delta \end{cases} \quad (C.10)$$

以上が安定条件であるが、これを図式的に行なう方法は以下のものである。

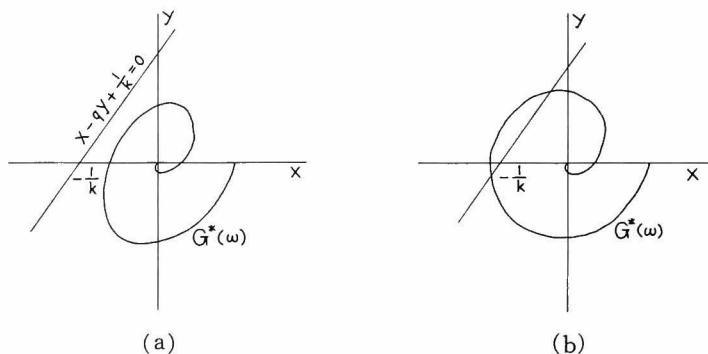
まず、条件 (C.5) 式は (C.3) 式を考慮すると、

$$X - qY + \frac{1}{k} > 0 \quad (C.11)$$

となり、結局安定判別条件は $X-Y$ 平面に描いたポポフ軌跡が直線

$$X - qY + \frac{1}{k} = 0 \quad (C.12)$$

の右側に存在すればよいことになる。この直線は点 $(-1/k, 0)$ をつねに通る、 q はこの直線のこう配に関係するが、任意の実数値であるから最も広い安定領域を与えるように選ばれたいわけである。したがって系の線形部分のポポフ軌跡さえ描けば容易に安定判別が行なえる。第 C.3 図において (a) の場合は安定であるが (b) のように直線 (C.12) とポポフ軌跡が交点を持つと安定とは判別できない。



第 C.3 図 ポポフの安定判別

C-2 拡張されたポポフの定理^{38), 39)}

文献(38)によるリアプノフ関数構成のための定理は次のようなものである。

定理 C.1

m 次実対角行列 $N = \text{diag}(n_i)$, $Q = \text{diag}(q_i)$ が存在して、各要素について $n_i \geq 0$, $q_i \geq 0$, $n_i + q_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ が成り立ち、 $-n_i/q_i$ は $W(s)$ の第 i 行の要素の極でないとする。この時、 $Z(s) = NG^{-1} + [N + Qs]W(s)$ が正実 (positive real) であれば、次式で記述される系は安定である。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax - Bf(\sigma) \\ \sigma &= Cx \end{aligned} \right\} \quad (C.13)$$

ここで、 $G = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_m)$

$$0 \leq \frac{f_i(\sigma_i)}{\sigma_i} < g_i \quad \text{for } g_i > 0 \quad (C.14)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

である。

以上の定理において、 $W(\infty) = 0$ であり、 $\{A, B, C\}$ が次式で与えられる $W(s)$ の最小実現であると仮定している。

$$W(s) = C[sI - A]^{-1}B \quad (C.15)$$

与えられた問題について、 $Z(s)$ が正実となるように適当な行列 N と Q を求めることは一般に非常に困難である。しかし、この N と Q が何らかの手段によって決定できると、次のような状態変数の二次形式と非線形部分の積分の和よりなる形のリアプノフ関数を構成することができる。

$$V(x) = x' P x + 2 \int_0^{Cx} f'(\sigma) Q d\sigma \quad (C.16)$$

行列 P は有限セクター条件より、次のような非線形代数方程式を解いて求めることができる。³⁹⁾

$$\left. \begin{aligned} PA + A'P &= -LL' \\ PB &= C'N + A'C'Q - LW \\ W'W &= QCB + B'C'Q \end{aligned} \right\} (C.17)$$

ここで、 L と W は補助行列である。

C-3 系統のモデル化⁴⁰⁾

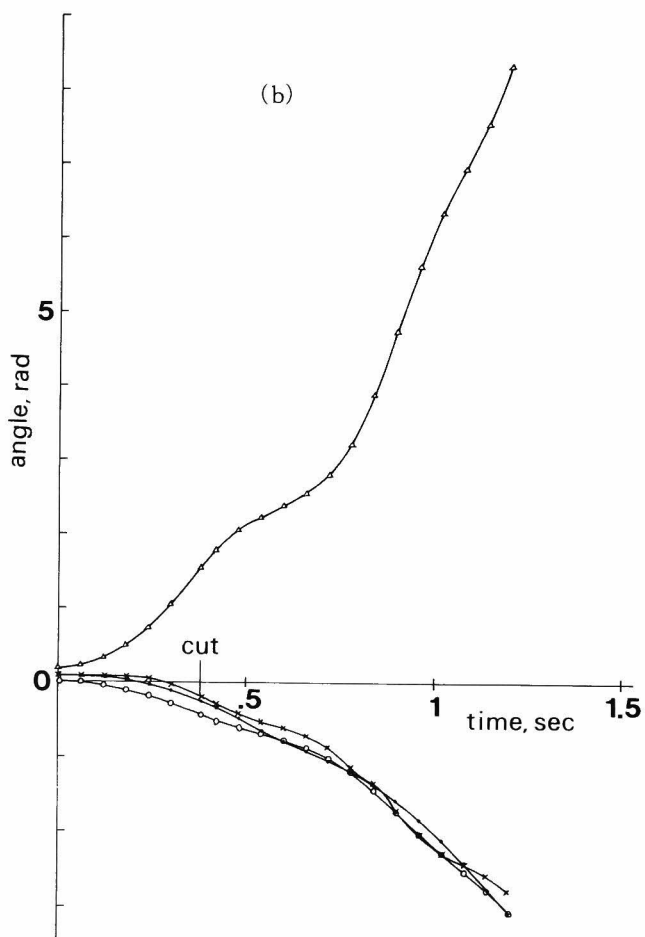
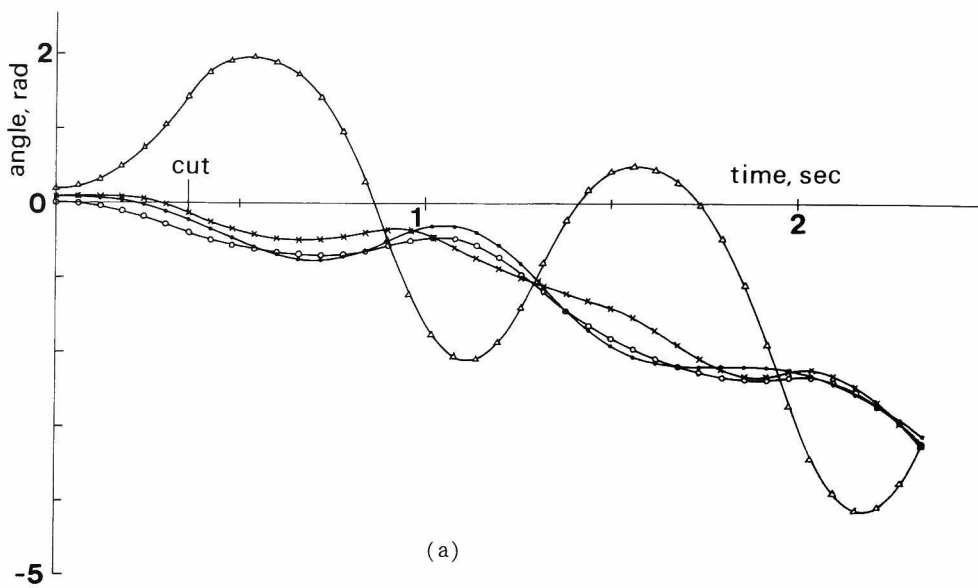
電力系統の安定度解析のためのシミュレーション法においては、発電機等の動作を表わす微分方程式を数値的に解き、いわゆる振動曲線を求める。その際、調速機の効果を考えなければ、故障除去後の各発電機への機械入力と電気出力とが一般に平衡せず、系統全体の周波数の上昇または下降を伴う。しかし、系統内発電機の加速または減速が一様に生じ、発電機間の相差角が発散しなければ安定とみなされる。(第 C.4 図)

回転子の運動をあらわす微分方程式だけを考えれば、 n 機系統は $2n$ の一階微分方程式で記述され、それらを解くことによって各発電機の回転子の位相角および角速度が求められる。これに対して、リアプノフ法などのいわゆる直接法を用いた安定判別においては微分方程式を解かないので、 n 機系統の動作を表わすのに必要で十分な微分方程式の数、換言すれば、必要な状態変数の数が問題となる。^{41), 42)}

各発電機の回転子の運動は (2.1) 式によって記述されるが、前述のように、たとえ系統全体が加速または減速する場合でも、すべての発電機が一様に加速または減速しておれば安定とみなされるので、基準軸からの絶対的な動揺ではなく、発電機間の相対的な動揺を考える必要がある。今、一般性を失うことなく第 1 番目の発電機を基準にとって、 δ_1, ω_1 からの差についての方程式を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta_1 - \delta_i) &= \omega_1 - \omega_i \\ \frac{d}{dt}(\omega_1 - \omega_i) &= \frac{1}{M_1} P_{m1} - \frac{1}{M_i} P_{mi} - \frac{D_1}{M_1} \omega_1 + \frac{D_i}{M_i} \omega_i \\ &\quad - \frac{1}{M_1} \sum_{j=1}^n E_i E_j [G_{ij} \cos(\delta_1 - \delta_j) + B_{ij} \sin(\delta_1 - \delta_j)] \\ &\quad + \frac{1}{M_i} \sum_{j=1}^n E_i E_j [G_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)] \\ &\quad i = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} (C.18)$$

この式より、 D/M の値がすべての発電機について等しい場合 (一様制動と呼ばれる)、あるいはその特別な場合として、制動を無視しうる場合 ($D_i = 0, i = 1, \dots, n$) には、ある一台の発電機を基準にし



第 C.4 図 過渡安定, 不安定の動揺曲線の例
(a) 安定, (b) 不安定

た $(n-1)$ 個の回転子角と $(n-1)$ 個の角速度の $2(n-1)$ 個の状態変数によって系統の相対的な運動を記述すればよいと考えられる。一方、 D/M の値が等しくなければ（非一様制動）， $(n-1)$ 個の回転子角と n 個の絶対的な角速度の $(2n-1)$ 個を状態変数とすればよいと考えられる。

リアプノフ関数の導出に前述のポポフの定理を用いる場合，可制御可観測なモデルを使う必要があるので，次に系統の可制御可観測モデルの導出を行ない，上の予測が正しいことを示す。

ポポフの定理は次の形の微分方程式に適用される。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 19})$$

ここで， \mathbf{x} ：状態ベクトル（ n 次）

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ：係数行列

$\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma})$ ： i 番目の要素が $\boldsymbol{\sigma}$ の i 番目の要素のみに依存するベクトル関数

今，3 機系に対して

$$\begin{aligned} x_1 &= \dot{\delta}_1, & x_4 &= \delta_1 - \delta_1^0 \\ x_2 &= \dot{\delta}_2, & x_5 &= \delta_2 - \delta_2^0 \\ x_3 &= \dot{\delta}_3, & x_6 &= \delta_3 - \delta_3^0 \end{aligned}$$

を状態変数に選び，さらに伝達コンダクタンスを無視すると，(2.1) 式は次のようにあらわされる。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_1/M_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -D_2/M_2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -D_3/M_3 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/M_1 & 1/M_1 & 0 \\ -1/M_2 & 0 & 1/M_2 \\ 0 & -1/M_3 & -1/M_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(\sigma_1) \\ f_2(\sigma_2) \\ f_3(\sigma_3) \end{pmatrix} \quad (\text{C. 21})$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & 0 & -1 \\ \vdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad (\text{C. 22})$$

ここで

$$\begin{aligned}
 f_1(\sigma_1) &= E_1 E_2 B_{12} [\sin \{ \sigma_1 + (\delta_1^0 - \delta_2^0) \} - \sin(\delta_1^0 - \delta_2^0)] \\
 f_2(\sigma_2) &= E_1 E_3 B_{13} [\sin \{ \sigma_2 + (\delta_1^0 - \delta_3^0) \} - \sin(\delta_1^0 - \delta_3^0)] \\
 f_3(\sigma_3) &= E_2 E_3 B_{23} [\sin \{ \sigma_3 + (\delta_2^0 - \delta_3^0) \} - \sin(\delta_2^0 - \delta_3^0)]
 \end{aligned} \tag{C.23}$$

よく知られているように、 n 次のシステム (C.19) が可制御であるための必要十分条件は、行列 $T = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$ のランクが n となることである。簡単な計算により、システム (C.20) の行列 T のランクは 4 であり、可制御でないことがわかる。また、可観測であるための必要十分条件は、行列 $U = [C', A'C', A'^2C', \dots, A'^{n-1}C']$ のランクが n となることであるが、システム (C.20) については、 L のランクも 4 であり、可観測ではない。

一般に n 機系統の場合について、上記の 3 機系の例と同じように状態変数をとれば、行列 A, B, C は次のようになる。

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -D_1/M_1 & & & & & \\ & -D_2/M_2 & & 0 & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & -D_n/M_n \\ \hline & 1 & & & 0 & \\ & & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & \\ & 0 & & & & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} M^{-1}D & 0_{nn} \\ \hline I_{nn} & 0_{nn} \end{array} \right] \tag{C.24}$$

($2n \times 2n$)

$$M = \text{diag} [M_i]$$

$$D = \text{diag} [D_i]$$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & 1 & -1 & & & 0 \\ & 1 & & -1 & & \\ & 1 & & & -1 & \\ & 1 & & 0 & & -1 \\ \hline & 0 & 1 & -1 & & 0 \\ & 0 & 1 & & -1 & \\ & 0 & 1 & & & -1 \\ & 0 & 1 & & & -1 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & & & -1 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 0 & 0 & & & 1 & -1 \end{array} \right] = [0_{mn} : S'_{nm}] \tag{C.25}$$

($m \times 2n$)

$\left. \begin{array}{c} \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \frac{n(n-1)}{2} = m$

$$B = \begin{bmatrix} M^{-1} S_{nm} \\ \dots\dots\dots \\ 0_{nm} \end{bmatrix} \quad (2n \times m) \quad (C.26)$$

この場合には、

$$\text{rank } T = \text{rank } L = 2(n-1)$$

となって、可制御でも可観測でもない。

3機系の場合について、第1番目の同期機を基準にして、次のような $(2n-1)$ 個の変数を状態変数に選ぶ

$$\begin{aligned} x_1 &= \dot{\delta}_1 & x_4 &= (\delta_1 - \delta_2) - (\delta_1^0 - \delta_2^0) \\ x_2 &= \dot{\delta}_2 & x_5 &= (\delta_1 - \delta_3) - (\delta_1^0 - \delta_3^0) \\ x_3 &= \dot{\delta}_3 \end{aligned} \quad (C.27)$$

この時、(2.1)式は次のような形に書きなおされる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1/M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D_2/M_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_3/M_3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/M_1 & 1/M_1 & 0 \\ -1/M_2 & 0 & 1/M_2 \\ 0 & -1/M_3 & -1/M_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\sigma_1) \\ f_2(\sigma_2) \\ f_3(\sigma_3) \end{bmatrix} \quad (C.28)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (C.29)$$

このモデルの可制御性を調べるため、行列 $T = [B, AB, A^2B, A^3B, A^4B]$ を考え、その第1, 2, 4, 5, 7列をとると、

$$\begin{bmatrix} 1/M_1 & 1/M_1 & -D_1/M_1^2 & -D_1/M_1^2 & D_1^2/M_1^3 \\ -1/M_2 & 0 & D_2/M_2^2 & 0 & -D_2^2/M_2^3 \\ 0 & -1/M_3 & 0 & D_3/M_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/M_1 + 1/M_2 & 1/M_1 & -(D_1/M_1^2 + D_2/M_2^2) \\ 0 & 0 & 1/M_1 & 1/M_1 + 1/M_3 & -D_1/M_1^2 \end{bmatrix}$$

となり、 $D_1/M_1 \neq D_2/M_2$ であれば5つの列は一次独立である。つまりTのランクは5となり、可制御であることがわかる。D/Mがすべての発電機については等しくないのであれば(このような場合を非一

様制動という), つねにTのランクは5となる。同様に行列 $L = [C', A'C', A'^2C', A'^3C', A'^4C']$ の第1, 2, 4, 5, 7列をとると,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -D_1/M_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & D_2/M_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり, D_1/M_1 と D_2/M_2 が等しくなければ, システム(C. 21)は可観測である。

n機系統について同様に

$$\begin{aligned} x_1 &= \dot{\delta}_1, & x_{n+1} &= (\delta_1 - \delta_2) - (\delta_1^0 - \delta_2^0) \\ x_2 &= \dot{\delta}_2, & x_{n+2} &= (\delta_1 - \delta_3) - (\delta_1^0 - \delta_3^0) \\ &\vdots & & \vdots \\ x_n &= \dot{\delta}_n, & x_{2n-1} &= (\delta_1 - \delta_n) - (\delta_1^0 - \delta_n^0) \end{aligned} \quad (C. 30)$$

のように状態変数を選ぶと,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -D_1/M_1 & & & & \\ & -D_2/M_2 & & 0 & \\ & & -D_3/M_3 & & 0 \\ & 0 & & -D_n/M_n & \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{array} \right] \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} n \\ \\ \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} n-1 \end{matrix} \equiv \left[\begin{array}{c|c} M^{-1}D & 0_{n(n-1)} \\ \hline U'_{n(n-1)} & 0_{(n-1)(n-1)} \end{array} \right] \quad ((2n-1) \times (2n-1))$$

$$C = \left[\begin{array}{c|cccc} & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & 0 & & & & 1 \\ \hline -1 & 1 & & & 0 \\ -1 & & 1 & & \\ -1 & & & 1 & \\ \vdots & & & & \\ -1 & & 0 & & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & -1 & 0 & & 1 \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{array} \right] \equiv [0_{mn} : R_{m(n-1)}] \quad (C.31)$$

$$B = \left[\begin{array}{c|c} -M^{-1} & \begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \end{matrix}}^{n-1} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^2 \\ \hline R'_{m(n-1)} \end{array} \right] \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{matrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}} \right\} n \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}} \right\} n-1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} M^{-1} S_{nm} \\ \hline 0_{(n-1)m} \end{array} \right] \quad ((2n-1) \times m)$$

このシステムのL行列を考えると、 C' および $A'C'$ の最初の $(n-1)$ 列と A'^2C' の第1列をとれば、

$$\left\{ \begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 1 & -D_1/M_1 \\ -1 & & 0 & D_2/M_2 \\ & \ddots & & 0 \\ & 0 & & \vdots \\ & & -1 & 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} n-1 \\ \\ \\ \end{array}$$

となり、 D_1/M_1 と D_2/M_2 が等しくなければ、行列Lのランクは $(2n-1)$ である。 D_1/M_1 と D_2/M_2 が等しければ、最後の列のかわりに、 A'^2C' の中から等しくない列を選べばよいので、全ての発電機について D/M が等しくない限り（非一様制動）このシステムは可観測であることがわかる。同様に、T行列の、B、ABの最初の $(n-1)$ 列と、 A^2B の第1列をとると、

$$\left[\begin{array}{c|ccc|ccc} 1/M_1 & 1/M_1 & \cdots & 1/M_1 & -D_1/M_1^2 & -D_1/M_1^2 & \cdots & -D_1/M_1^2 & D_1^2/M_1^3 \\ -1/M_2 & 0 & \cdots & 0 & D_2/M_2^2 & 0 & \cdots & 0 & -D_2^2/M_2^3 \\ 0 & -1/M_3 & \cdots & 0 & 0 & D_3/M_3^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1/M_n & 0 & 0 & \cdots & D_n/M_n^2 & 0 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c|ccc|ccc} \end{array}} \right\} n$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc|ccc} & & & & 1/M_1+1/M_2 & 1/M_1 & \cdots & 1/M_1 & -(D_1/M_1^2+D_2/M_2^2) \\ & & & & 1/M_1 & 1/M_1+1/M_3 & \cdots & 1/M_1 & -D_1/M_1^2 \\ 0 & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1/M_1 & 1/M_1 & \cdots & 1/M_1+1/M_n & -D_1/M_1^2 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c|ccc|ccc} \end{array}} \right\} n-1-11$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n-1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_1$

このT行列も、行列Lと同様にして、非一様制動であればランクが $(2n-1)$ となり、したがって前記システムは可制御である。

D/M の値がすべての発電機について等しければ（ $D/M=a$ とする。 $D=0$ つまり $a=0$ の場合も含む）。以上の議論は成立しない。このような一様制動の場合には次のように状態変数を選ぶ。

$$\begin{aligned} x_1 &= \dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_2 & x_n &= (\delta_1 - \delta_2) - (\delta_1^0 - \delta_2^0) \\ x_2 &= \dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_3 & x_{n+1} &= (\delta_1 - \delta_3) - (\delta_1^0 - \delta_3^0) \\ &\vdots & &\vdots \\ x_{n-1} &= \dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_n & x_{2n-2} &= (\delta_1 - \delta_n) - (\delta_1^0 - \delta_n^0) \end{aligned} \quad (C.32)$$

このときシステムの各行列は、

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} -a & & & \\ & -a & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & -a \\ \hline 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c|ccc} \end{array}} \right\} \begin{matrix} n-1 \\ n-1 \end{matrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} -a I_{(n-1)(n-1)} & 0_{(n-1)(n-1)} \\ \hline I_{(n-1)(n-1)} & 0_{(n-1)(n-1)} \end{array} \right] \quad (2(n-1) \times 2(n-1))$$

ここに, $I_{mm} = m$ 次の単位行列

$$\lambda_i = D_i/M_i$$

このように N, Q を選ぶと $Z(s)$ が正実となることが容易に確かめられる。また, (C.31) 式からわかるように, $B'C' = CB = 0_{mm}$ となるので, (C.17) 式はかなり簡単化されて次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} PA + A'P &= -L L' \\ PB &= C' + A'C'Q \end{aligned} \right\} \quad (C.35)$$

いま,

$$P_{(2n-1)(2n-1)} = \left[\begin{array}{c|c} P_{nn} & P_{n(n-1)} \\ \hline P'_{n(n-1)} & P_{(n-1)(n-1)} \end{array} \right] \quad (C.36)$$

とおき, これを (C.35) 式に代入して解くと, P は次のように求められる (C-5 参照)。

$$\left. \begin{aligned} P_{nn} &= \left(\sum_{i=1}^n 1/\lambda_i \right) M \\ P_{(n-1)(n-1)} &= R'S'U [U'\lambda^{-1}M^{-1}SS'U]^{-1} \\ P_{n(n-1)} &= \lambda^{-1}UP_{(n-1)(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (C.37)$$

ただし, $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = DM^{-1}$

$P_{(n-1)(n-1)}$ を展開した形で書くと,

$$P_{(n-1)(n-1)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n M_i \lambda_i} \left[\begin{array}{cccc} M_2 \lambda_2 \sum_{j=1, j \neq 2}^n M_j \lambda_j & -M_2 \lambda_2 M_3 \lambda_3 \cdots & -M_2 \lambda_2 M_n \lambda_n & \\ -M_3 \lambda_3 M_2 \lambda_2 & M_3 \lambda_3 \sum_{j=1, j \neq 3}^n M_j \lambda_j \cdots & -M_3 \lambda_3 M_n \lambda_n & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ -M_n \lambda_n M_2 \lambda_2 & -M_n \lambda_n M_3 \lambda_3 \cdots & M_n \lambda_n \sum_{j=1, j \neq n}^n M_j \lambda_j & \end{array} \right] \quad (C.38)$$

このように $P_{(n-1)(n-1)}$ がわかると, 前から $\lambda^{-1}U$ を掛けて $P_{n(n-1)}$ が求まり, P_{nn} はもともと単純な形があるので, 正定対称行列 $P_{(2n-1)(2n-1)}$ が完全に求まる。(C.16) 式の時間微分は次式で与えられる。

$$\dot{V}(x) = -x' L L' x - 2f'(\sigma) \sigma \quad (C.39)$$

LL' は明らかに半正定であるので, (C.39) 式の \dot{V} は $-(\pi + 2\theta_1) \leq \sigma_1 \leq (\pi - 2\theta_1)$, $i = 1, 2, \dots, m$ において半負定であり, $-(\pi + 2\theta_1) < \sigma_1 < (\pi - 2\theta_1)$, $i = 1, 2, \dots, m$ において負定となる。

(ii) 一様制動の場合

一様制動の場合には行列NおよびQを次のように選ぶ。($a = D_i / M_i$, $i = 1, 2, \dots, n$)

$$N = \frac{a}{4} I_{mm}, \quad Q = \frac{1}{2} I_{mm} \quad (C.40)$$

非一様制動の場合と同じく, $B'C' = CB = 0_{mm}$ であるので (C.17) 式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} PA + A'P &= -LL' \\ PB &= NC' + A'C'Q \end{aligned} \right\} \quad (C.41)$$

ここで

$$P_{(2n-2)(2n-2)} = \left[\begin{array}{c|c} \Phi_{(n-1)(n-1)} & \Gamma_{(n-1)(n-1)} \\ \hline \Gamma'_{(n-1)(n-1)} & \Psi_{(n-1)(n-1)} \end{array} \right] \quad (C.42)$$

とおき, (C.41) 式に代入して解くと次の結果を得る (C-6 参照)。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{(n-1)(n-1)} &= \Gamma'_{(n-1)(n-1)} \\ &= \frac{a}{4} R' S' U [U M^{-1} S S' U]^{-1} \equiv \frac{a}{4} \mathcal{E} \\ \Phi_{(n-1)(n-1)} &= \frac{2}{a} \Gamma_{(n-1)(n-1)} = \frac{1}{2} \mathcal{E} \\ \Psi_{(n-1)(n-1)} &= a \Gamma_{(n-1)(n-1)} = \frac{a^2}{4} \mathcal{E} \end{aligned} \right\} \quad (C.43)$$

$\mathcal{E}_{(n-1)(n-1)}$ を展開した形に書き直すと,

$$\mathcal{E}_{(n-1)(n-1)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n M_i} \left[\begin{array}{ccc} M_2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n M_j & -M_2 M_3 & \cdots -M_2 M_n \\ -M_3 M_2 & M_3 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^n M_j & \cdots -M_3 M_n \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ -M_n M_2 & -M_n M_3 & \cdots M_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n M_j \end{array} \right] \quad (C.44)$$

このようにして一様制動の場合についても正定な対称行列Pが求まり, (C.16) 式よりリアプノフ関数Vが得られる。

このようにして得られたリアプノフ関数には制動の効果が入っている。つまり, (C.16) 式の第一項目

$$\mathbf{x}' P \mathbf{x} = [\omega' : \delta'] \left[\begin{array}{c|c} 2\mathcal{E} & a\mathcal{E} \\ \hline a\mathcal{E} & a^2\mathcal{E} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \omega \\ \delta \end{array} \right] \bigg/ 4$$

$$= \frac{1}{2} \omega' \Xi \omega + \frac{a}{4} \delta' \Xi \omega + \frac{a}{4} \omega' \Xi \delta + \frac{a^2}{4} \delta' \Xi \delta \quad (\text{C. 45})$$

の第2～4項目に含まれている。つまり、

$$V = \frac{1}{2} \omega' \Xi \omega + \frac{a}{4} (\delta' \Xi \omega + \omega' \Xi \delta) + \frac{a^2}{4} \delta' \Xi \delta + \int_0^{C\mathbf{x}} \mathbf{f}'(\sigma) d\sigma \quad (\text{C. 46})$$

また

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega' \Xi \omega &= \frac{1}{2M_T} [\omega_{12} \cdots \omega_{1n}] \begin{bmatrix} M_2 \sum_{j=1}^n M_j & -M_2 M_3 & \cdots & -M_2 M_n \\ -M_3 M_2 & M_3 \sum_{j=1}^n M_j & \cdots & -M_3 M_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -M_n M_2 & -M_n M_3 & \cdots & M_n \sum_{j=1}^n M_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{12} \\ \vdots \\ \omega_{1n} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2M_T} \sum_{i>k} M_i M_k \omega_{ik}^2 \end{aligned} \quad (\text{C. 47})$$

したがって、制動が無視できる場合 ($D_i = 0$, つまり $a = 0$) には, (C. 46) 式の両辺に M_T をかけて,

$$V = \sum_{i>k} M_i M_k \omega_{ik}^2 / 2 + M_T \int_0^{C\mathbf{x}} \mathbf{f}'(\sigma) d\sigma \quad (\text{C. 48})$$

つまり

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i>k} [M_i M_k \omega_{ik}^2 / 2 - M_T E_i E_k B_{ik} (\cos \delta_{ik} - \cos \delta_{ik}^S) \\ &\quad - (\delta_{ik} - \delta_{ik}^S) M_T E_i E_k B_{ik} \sin \delta_{ik}^S] \end{aligned} \quad (\text{C. 49})$$

これはエネルギー積分によるリアプノフ関数 V_2 と同じである。したがって、制動を無視した場合には、本節で示したポポフの定理によるリアプノフ関数の構成法は、エネルギー積分法によるのと同じ結果となることが明らかになった。

C-5 $P_{(2n-1)(2n-1)}$ の導出 (非一様制動の場合)

$$P_{(2n-1)(2n-1)} = \begin{bmatrix} P_{nn} & \vdots & P_{n(n-1)} \\ \hline P'_{n(n-1)} & \vdots & P_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \quad (\text{C. 50})$$

$$L_{(2n-1)m} = \begin{bmatrix} L_{nm} \\ \vdots \\ L_{(n-1)m} \end{bmatrix} \quad (\text{C. 51})$$

とする。行列 $P_{(2n-1)(2n-1)}$ が対称であるためには小行列 P_{nn} および $P_{(n-1)(n-1)}$ も対称でなければならない。

(C.50), (C.51) 式を (C.15) 式から導かれる次式

$$P_{(2n-1)(2n-1)}A + A'P_{(2n-1)(2n-1)} = -L_{(2n-1)m}L'_{(2n-1)m} \quad (C.52)$$

$$P_{(2n-1)(2n-1)}B = C' + A'C'Q \quad (C.53)$$

に代入すると,

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c|c} - (P_{nn}\lambda + \lambda P_{nn}) + P_{n(n-1)}U'_{n(n-1)} + U_{n(n-1)}P'_{n(n-1)} & -\lambda P_{n(n-1)} + U_{n(n-1)}P_{(n-1)(n-1)} \\ \hline -P'_{n(n-1)}\lambda + P_{(n-1)(n-1)}U'_{n(n-1)} & 0_{(n-1)(n-1)} \end{array} \right) \\ &= - \left(\begin{array}{c|c} L_{nm}L'_{nm} & L_{nm}L'_{(n-1)m} \\ \hline L_{(n-1)m}L'_{nm} & L_{(n-1)m}L'_{(n-1)m} \end{array} \right) \quad (C.54) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{c} P_{nn}M^{-1}S_{nm} \\ \hline P'_{n(n-1)}M^{-1}S_{nm} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0_{nm} \\ \hline R'_{m(n-1)} \end{array} \right) + \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \right) \left(\begin{array}{c} U_{n(n-1)}R'_{m(n-1)} \\ \hline 0_{(n-1)m} \end{array} \right) \quad (C.55)$$

(C.54) 式より

$$L_{(n-1)m}L'_{(n-1)m} = 0_{(n-1)(n-1)} \quad (C.56)$$

$$\therefore L_{(n-1)m} = 0_{(n-1)m} \quad (C.57)$$

この結果を用いて, $P_{nn}, P_{n(n-1)}, P_{(n-1)(n-1)}$ についての方程式が次のように得られる。(C.55)式より,

$$\begin{aligned} P_{nn}M^{-1}S_{nm} &= \left(\sum_{i=1}^n 1/\lambda_i \right) U_{n(n-1)}R'_{m(n-1)} = \left(\sum_{i=1}^n 1/\lambda_i \right) S_{nm} \\ \therefore P_{nn} &= \left(\sum_{i=1}^n 1/\lambda_i \right) M \quad (C.58) \end{aligned}$$

明らかに P_{nn} は対称で正定である。次に, (C.54) 式より,

$$\begin{aligned} -\lambda P_{n(n-1)} + U_{n(n-1)}P_{(n-1)(n-1)} &= 0_{n(n-1)} \\ \therefore P_{n(n-1)} &= \lambda^{-1} U_{n(n-1)}P_{(n-1)(n-1)} \quad (C.59) \end{aligned}$$

また, (C.55) 式より

$$P'_{n(n-1)}M^{-1}S_{nm} = R'_{m(n-1)} \quad (C.60)$$

(C.59) 式を (C.60) 式に代入すると,

$$P_{(n-1)(n-1)}U'_{n(n-1)}\lambda^{-1}M^{-1}S_{nm} = R'_{m(n-1)} \quad (C.61)$$

両辺に $S'_{nm} U_{n(n-1)}$ を右からかけると,

$$P_{(n-1)(n-1)} U'_{n(n-1)} \lambda^{-1} M^{-1} S_{nm} S'_{nm} U_{n(n-1)} = R'_{m(n-1)} S'_{nm} U_{n(n-1)} \quad (C.62)$$

$$\therefore P_{(n-1)(n-1)} = R'_{m(n-1)} S'_{nm} U_{n(n-1)} [U'_{n(n-1)} \lambda^{-1} M^{-1} S_{nm} S'_{nm} U_{n(n-1)}]^{-1} \quad (C.63)$$

(C.63) 式を (C.59) 式に代入すると $P_{n(n-1)}$ が求まる。

$$\begin{aligned} & - [P_{(2n-1)(2n-1)} A + A' P_{(2n-1)(2n-1)}] \\ & = \left[\begin{array}{c|c} (P_{nn} \lambda + \lambda P_{nn}) - (P_{n(n-1)}) U'_{n(n-1)} + U_{n(n-1)} P'_{n(n-1)} & 0_{n(n-1)} \\ \hline 0_{(n-1)n} & 0_{(n-1)(n-1)} \end{array} \right] \quad (C.64) \end{aligned}$$

右辺の左上要素は明らかに正定であり、したがって $- [P_{(2n-1)(2n-1)} A + A' P_{(2n-1)(2n-1)}]$ は半正定である。

C-6 $P_{(2n-2)(2n-2)}$ の導出 (一様制動の場合)

$$P_{(2n-2)(2n-2)} = \left[\begin{array}{c|c} \Phi_{(n-1)(n-1)} & \Gamma_{(n-1)(n-1)} \\ \hline \Gamma'_{(n-1)(n-1)} & \Psi_{(n-1)(n-1)} \end{array} \right] \quad (C.65)$$

$$L_{(2n-2)m} = \left[\begin{array}{c} L_{(n-1)m} \\ \hline V_{(n-1)m} \end{array} \right] \quad (C.66)$$

とおく。また、(C.15) 式より

$$P_{(2n-2)(2n-2)} A + A' P_{(2n-2)(2n-2)} = -L_{(2n-2)m} \dot{L}'_{(2n-2)m} \quad (C.67)$$

$$P_{(2n-2)(2n-2)} B = C' N + A' C' Q \quad (C.68)$$

(C.65), (C.66) 式を (C.67), (C.68) 式に代入して、(A, B, C は (C.33) 式参照)

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} -2a \Phi_{(n-1)(n-1)} + \Gamma_{(n-1)(n-1)} + \Gamma'_{(n-1)(n-1)} & -a \Gamma_{(n-1)(n-1)} + \Psi_{(n-1)(n-1)} \\ \hline -a \Gamma'_{(n-1)(n-1)} + \Psi_{(n-1)(n-1)} & 0_{(n-1)(n-1)} \end{array} \right] \\ & = - \left[\begin{array}{c|c} L_{(n-1)m} \dot{L}'_{(n-1)m} & L_{(n-1)m} V'_{(n-1)m} \\ \hline V_{(n-1)m} \dot{L}'_{(n-1)m} & V_{(n-1)m} V'_{(n-1)m} \end{array} \right] \quad (C.69) \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c} \Phi_{(n-1)(n-1)} U'_{n(n-1)} M^{-1} S_{nm} \\ \hline \Gamma'_{(n-1)(n-1)} U'_{n(n-1)} M^{-1} S_{nm} \end{array} \right] = \frac{a}{4} \left[\begin{array}{c} 0_{(n-1)m} \\ \hline R'_{m(n-1)} \end{array} \right] + \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} R'_{m(n-1)} \\ \hline 0_{(n-1)m} \end{array} \right] \quad (C.70)$$

(C. 69) 式より

$$V_{(n-1)m} V'_{(n-1)m} = 0_{(n-1)(n-1)}$$

$$\therefore V_{(n-1)m} = 0_{(n-1)m} \quad (C. 71)$$

(C. 71) 式を (C. 69), (C. 70) 式に代入して, 次のような $\phi_{(n-1)(n-1)}$, $\Gamma_{(n-1)(n-1)}$, $\Psi_{(n-1)(n-1)}$ についての方程式が得られる。

$$\Gamma_{(n-1)(n-1)} = \Gamma'_{(n-1)(n-1)} = \frac{1}{a} \Psi_{(n-1)(n-1)} \quad (C. 72)$$

$$\Gamma'_{(n-1)(n-1)} U'_{n(n-1)} M^{-1} S_{nm} = \frac{a}{4} R'_{m(n-1)} \quad (C. 73)$$

$$\phi_{(n-1)(n-1)} U'_{n(n-1)} M^{-1} S_{nm} = \frac{1}{2} R'_{m(n-1)} \quad (C. 74)$$

(C. 73) 式の両辺に右から $S'_{nm} U_{n(n-1)}$ を掛けると,

$$\begin{aligned} \Gamma'_{(n-1)(n-1)} U'_{n(n-1)} M^{-1} S_{nm} S'_{nm} U_{n(n-1)} &= \frac{a}{4} R'_{m(n-1)} S'_{nm} U_{n(n-1)} \\ \therefore \Gamma_{(n-1)(n-1)} &= \frac{a}{4} R'_{m(n-1)} S'_{nm} U_{n(n-1)} [U'_{n(n-1)} M^{-1} S_{nm} S'_{nm} U_{n(n-1)}]^{-1} \end{aligned} \quad (C. 75)$$

同様に (C. 74) 式と (C. 75) 式より

$$\phi_{(n-1)(n-1)} = \frac{2}{a} \Gamma_{(n-1)(n-1)} \quad (C. 76)$$

また, (C. 72) 式より

$$\Psi_{(n-1)(n-1)} = a \Gamma_{(n-1)(n-1)} \quad (C. 77)$$

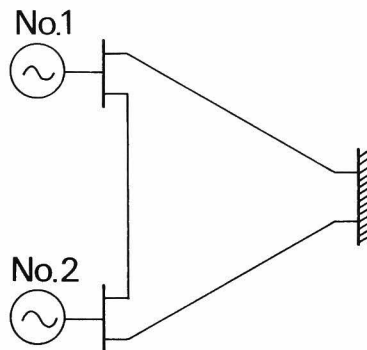
したがって,

$$- [P_{(2n-2)(2n-2)} A + A' P_{(2n-2)(2n-2)}] = \begin{bmatrix} 2\Gamma_{(n-1)(n-1)} & \vdots & 0_{(n-1)(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{(n-1)(n-1)} & \vdots & 0_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \quad (C. 78)$$

$\Gamma_{(n-1)(n-1)}$ は正定であるので (C. 78) 式は半正定である。したがって, $\dot{V}(\mathbf{x})$ は負定である。

付録D 二機無限大母線系統におけるリアプノフ関数のしきい値

次式で記述される抵抗分の無視しうる二機無限大母線系を考える（第D.1図）。



第D.1図 2機無限大母線系

$$\left. \begin{aligned} M_1 \frac{d^2 \delta_1}{dt^2} &= P_{m1} - \{ P_{e1} \sin \delta_1 + P_{e12} \sin (\delta_1 - \delta_2) \} \\ M_2 \frac{d^2 \delta_2}{dt^2} &= P_{m2} - \{ P_{e2} \sin \delta_2 + P_{e12} \sin (\delta_2 - \delta_1) \} \end{aligned} \right\} \quad (D.1)$$

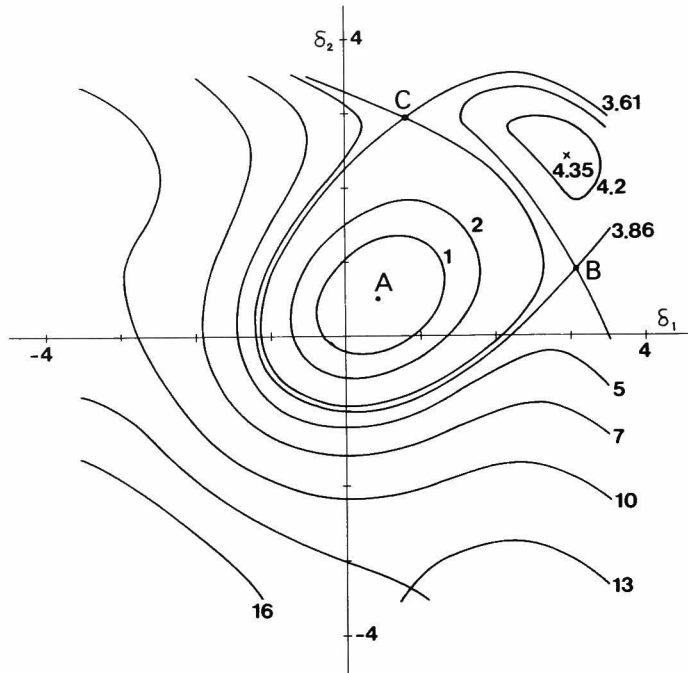
$$\begin{aligned} M_1 = M_2 &= 0.02 & P_{m1} &= 1.0 & P_{m2} &= 1.5 \\ P_{e1} &= 2.5 & P_{e2} &= 3.0 & P_{e12} &= 1.0 \end{aligned}$$

この系に対するポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} V_p(\delta_1, \delta_2) &= -P_{m1}(\delta_1 - \delta_1^S) - P_{m2}(\delta_2 - \delta_2^S) \\ &\quad - P_{e1}(\cos \delta_1 - \cos \delta_1^S) - P_{e2}(\cos \delta_2 - \cos \delta_2^S) \\ &\quad - P_{e12} \{ \cos(\delta_1 - \delta_2) - \cos(\delta_1^S - \delta_2^S) \} \end{aligned} \quad (D.2)$$

$\delta_1 - \delta_2$ 平面における等ポテンシャル曲線を示すと第D.2図のようになる。

A点は安定な平衡点、B点、C点はそれぞれ、1号機、2号機の脱調モードに対応する不安定平衡点（あん点）である。この例の場合、リアプノフ関数による過渡安定判別のしきい値は、2つのあん点におけるリアプノフ関数の最小値（ V_{\min} ）、つまりC点における値3.61となる。これは等V曲線が $V < 3.61$ では閉じているので、リアプノフ関数の値が一定に保たれる限り脱調しないが、3.61以上では開いているので不安定となる可能性があるからである。しかし、第1動揺で脱調するか否かを知りたい時には、その脱調モードに対応するあん点におけるリアプノフ関数の値（ V_{cr} ）をしきい値とすると、上記の V_{\min} をしきい値とするよりも実際の限界故障除去時間に近い評価が得られる。



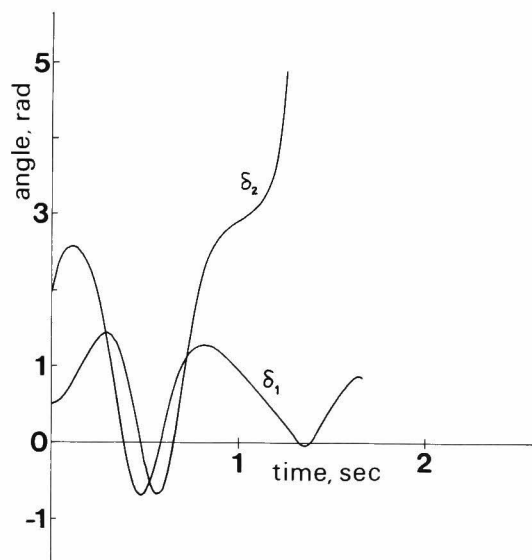
第D.2図 位相角平面における等ポテンシャル曲線

(D.1) 式の二機無限大母線系において、1号機、2号機それぞれの発電機に別々にじょう乱を与えた時の限界故障除去時間と、リアプノフ関数による評価を第D.1表に示す。この例では、2号機の脱調

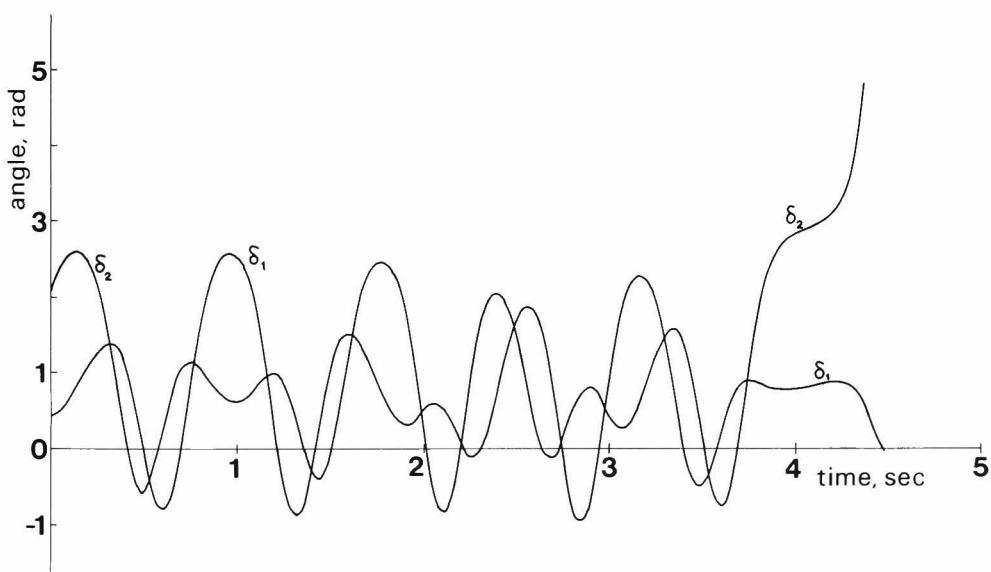
第D.1表 第1動揺に対する限界故障除去時間とその評価(秒)

	実際の値	V_{\min} による評価	V_{cr} による評価
1号機脱調	0.337	0.320	0.330
2号機脱調	0.323	0.317	0.317

に対応するモードが V_{\min} を与えるので、2号機にじょう乱を与えた場合は、 V_{\min} と V_{cr} が一致するが、1号機にじょう乱を与えた場合は V_{cr} による評価の方が第一動揺については実際の値に近くなる。しかし、いずれのじょう乱の場合にも、リアプノフ関数の値が V_{\min} ($=3.61$)をこえていれば、第1動揺では脱調しなくてもいずれは脱調することが第D.3図よりわかる。



第D.3図(a) 1号機に対するじょう乱時の過渡応答
(0.327秒しゃ断, $V = 3.72$)



第D.3図(b) 2号機に対するじょう乱時の過渡応答(0.32秒しゃ断, $V = 3.62$)

付録E ズボフの方法によるリアプノフ関数の構成

ズボフの方法によるリアプノフ関数の構成は次の方程式を解くことによって行なう。

$$\dot{V} = -U(x)(1-V) \quad (\text{E.1})$$

あるいは，本文で示したように

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n = [\nabla V]' F = -U(x)(1-V) \quad (\text{E.2})$$

上式が解けて V が解析的な形で求まれば， $V=1$ が安定領域を与える。簡単な変換より (E.1) 式の別の形が得られる。つまり，

$$v = -\log(1-V) \quad 0 \leq V < 1$$

とおくと，(E.1) 式は次のようになる。

$$\dot{v} = -U(x) \quad (\text{E.3})$$

この時の安定限界は $v \rightarrow \infty$ によって与えられる。

(E.3) 式を用いて解が解析的な形で求まる例として次のような系を考える。¹¹⁾

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

$U(x) = 2(x_1^2 + x_2^2)$ にとると (E.3) 式は次のようになる。

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} (-x_1 + 2x_1^2 x_2) + \frac{\partial v}{\partial x_2} (-x_2) = -2(x_1^2 + x_2^2) \quad (\text{E.5})$$

(E.5) 式は解析的な形で解けて，

$$v(x) = x_2^2 + x_1^2 / (1 - x_1 x_2) \quad (\text{E.6})$$

したがって，安定限界は $v \rightarrow \infty$ より

$$x_1 x_2 = 1 \quad (\text{E.7})$$

によって与えられる。

付録F 電力系統の信頼度制御⁴³⁾

良質の電力を中断なく供給することは現代社会において不可欠である。したがって、電力の質を確保するために系統周波数、系統電圧の変動を抑え、また供給の信頼度を確保するために、事故波及などによる重大事故を未然に防止し、たとえ供給支障が生じても停電時間を最小にする必要がある。このような電力の供給信頼度を高めるための制御は信頼度制御と呼ばれる。

今日の電力系統は非常に大規模、複雑であり、また超高压送電線の建設によりじょう乱の影響が大きいので、故障時などにおける給電運用者の判断がむずかしくなっている。大停電事故を防止して供給信頼度を適正に維持するためには、系統計画において信頼度基準にもとづき、想定事故に対して事故波及を生じないような強い系統を作ることが重要である。しかし、最近のように電源や送電線の建設に対する制約が大きく、電源地点の遠隔化、集中化、設備の高稼働率化などを強いられ、また工事中の変則系統など系統にひずみを生じる要因も多くなってくると、運用面でこれを補う必要が増してくる。したがって、リアルタイムのデータを用いて信頼度監視を行ない、停電や供給電力の質の低下が起りうる状態を検出して事前に適当な予防措置をとることが必要となる。

F-1 セキュリティ(信頼度)の定義^{16), 43)}

すべての需要家が規定周波数、規定電圧の電力を不断に供給されており、かつ発電機、変圧器、送電線などの電力設備がその定格値内で運用されている状態を定常状態という。この状態における信頼度制御の目的は、予測される将来の状況においても系統を定常状態に維持する事である。そのため制御は予防的な性格をもってくる。実際には系統を定常状態に保つだけでは不十分で、じょう乱によって後述の緊急状態に移行する可能性がある。この点に関して系統のセキュリティが定義される。まず、発生する可能性の高いじょう乱(偶発事故)をいくつか取り上げ、定常状態にある系統にそのおのおのが発生すると仮定する。もし、すべての想定故障に対して系統が定常状態にとどまれば系統はセキュア(secure)であるといい、セキュアでなければ、つまり少なくとも一つの故障によって系統が緊急状態に移る場合をインセキュア(insecure)であると定義する。ただし、緊急状態とは次のような異常が発生している状態である。

- (a) 周波数異常 系統の発電力もしくは負荷の一部が系統から切り離され、あるいは、送電線のルート事故による系統分割などによって発電力と消費電力との間に大きな不均衡を生じ、周波数が許容値以上に上昇または下降するため、発電力または負荷がさらに脱落し、系統崩壊に至る。
- (b) 系統脱調 事故しゃ断の遅延あるいは事故設備除去後の健全設備の過大潮流のために系統間が脱調あるいは大電源が脱調する。
- (c) 送電線、変圧器の過負荷 事故設備しゃ断後、他の健全送電線や変圧器などの設備が過負荷となり、これが脱落するためにさらに他の設備が過負荷となる。
- (d) 電圧低下 大容量電源の脱落などにより無効電力バランスがくずれて系統電圧が異常に低下し、

安定運転の維持が不可能となる。

以上のようなセキュリティの定義によると、想定事故の数が多くなる程セキュリティの基準がきびしくなる。したがって、系統の性質や要求される信頼度および経済性をも考慮して想定する事故を選択する必要がある。理想的には、偶発事故の発生確率とその事故による供給支障など事故のおよぼす影響を定量的に評価した損失期待量と、事故に対してあらかじめ対策をたてておくことによる燃料費などの運転経費の増分との合計を最小にすることが望ましいが、前者の評価が非常に困難である。

F-2 信頼度監視

電力系統はできる限りセキュアな定常状態で運転されるべきであり、もしインセキュアな定常状態へ移行すれば、系統構成の適正化、発電機出力および潮流の調整等によりセキュアな状態にもどすことが望ましい。そのための制御が定常状態における信頼度制御であり、セキュアかインセキュアかについて判別を行なうのが信頼度監視（セキュリティ監視）の目的である。

セキュリティを評価するためには系統の現運転状態に対して想定事故を模擬し、緊急状態に至るか否かをチェックする。前述の4つの緊急状態の原因のうち、(c)および(d)に対する監視は本質的には想定事故による系統の変化に対して潮流計算を実行することであり、計算の高速化、必要記憶容量の削減ならびに系統構成の変更に対する追従性をめざした計算法の研究が続けられている。また、(a)の周波数変化も比較的短時間の計算によって想定事故下における変化の値を知ることができるので、事故の波及をチェックすることが可能である。しかし、(b)の系統脱調に対する監視は過渡安定度計算を伴うので、従来のシミュレーション法では時間がかかりすぎて系統構成の変化に追従できない。そのため、パターン認識の手法を用いた信頼度評価法が提案されている。^{15), 16), 44)}

付録G 制約付非線形最適化問題の解法²⁰⁾

非線形不等式制約条件のもとで、非線形関数を最小化するという最適化問題は次のように定式化される。

$$g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \text{ のもとで}$$

$f(x)$ を最小化する。ただし x は m 次元ベクトル

この制約付の最適化問題は、一連の制約のない問題に変換して解くことができる。パウエル氏はそのために次のような関数を導入した。

$$F(x, r, s) = f(x) + \sum_{i=1}^m \frac{(g_i(x) + s_i)^2}{r_i}, \quad g_i(x) \geq 0$$

ここに $s_i, r_i, i = 1, \dots, m$ は一連の最小化のそれぞれにおいては一定であり、不等式は成立しない時だけ含まれる。つまり成り立っておれば除去される。 j 回目の繰返しのはじめに、 r^j, s^j の組がある値をもっており、また $F(x, r^j, s^j)$ を最小にする x が $x^j(r^j, s^j)$ であることがわかれば、 $g_i(x) = g_i(x^j(r^j, s^j))$ なる制約のもとに $f(x)$ の最小値が求まったことになる。ここに i は満たされていない不等式制約条件を含む。もしある精度でもって、 $g_i(x^j(r^j, s^j)) = 0$ となれば、もとの問題の制約のもとで $f(x)$ の最小値が得られた事になる。この場合、最小点 $x^j(r^j, s^j)$ において $F(x^j, r^j, s^j)$ の値と $f(x^j)$ の値は等しくはならない。

残された問題は、各繰返しの過程で制約 $g_i(x)$ が満足されるように r_i, s_i を修正する方法を見つけることである。パウエル氏は、 j 回目の繰返しから $j+1$ 回目の繰返しへ移る時に、 s を次のように変化すればよいことを見出した。

$$s_i^{j+1} = s_i^j + g_i$$

s_i の項は、それら全体の効果が小さくなるようにするのがよく、また制約条件 g_i の収束が遅い場合には r_i を小さくする。その後、小さくなった r_i に対応して、 r_i と同じ割合で s_i の値を小さくするのがよい。最初は s_i をすべて 0 とし、 r_i はすべての g_i / r_i が $f(x)$ の初期値と同じオーダーになるように選ぶ。 g_i がどの位の速さで収束すれば十分とみなすか、および r_i, s_i をどのような率でへらすかは問題に応じて決定しなければならない。本章の問題では、最も制約からのずれの大きいものを $1/4$ にするようにし、 r_i は $1/100$ に減ずるのが適切であった。第 G.1 図にパウエルの方法のフロー図を示す。

付録H アドミタンス距離

与えられた系統定数，運転状態に対する潮流計算より母線電圧が決まり，系統負荷を大地に対する定インピーダンスで表現すると，

$$I = YV \quad (\text{H.1})$$

ここで， I と V を，発電機ノードに対する I_G, V_G ，故障ノードに対する I_F, V_F ，および負荷ノードに対する I_L, V_L に分離すると，

$$\begin{bmatrix} I_G \\ I_F \\ I_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{GG} & Y_{GF} & Y_{GL} \\ Y_{FG} & Y_{FF} & Y_{FL} \\ Y_{LG} & Y_{LF} & Y_{LL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_G \\ V_F \\ V_L \end{bmatrix} \quad (\text{H.2})$$

と書ける。負荷は定インピーダンスとして Y に含まれているので $I_L = 0$ となり(H.2)式より V_L を消去して，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_G \\ I_F \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} Y_{GG} & Y_{GF} \\ Y_{FG} & Y_{FF} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_{GL} \\ Y_{FL} \end{bmatrix} \cdot Y_{LL}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} Y_{LG} & Y_{LF} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} V_G \\ V_F \end{bmatrix} \\ &= Y' \cdot \begin{bmatrix} V_G \\ V_F \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

また，過渡リアクタンス x'_d 背後の誘起電圧 E_G と端子電圧 V_G との間に次の関係がなりたつ。

$$\begin{aligned} E_G &= V_G + X_d \cdot I_G \\ X_d &= \text{diag} \{ jx'_d \} \end{aligned} \quad (\text{H.4})$$

(H.3)と(H.4)より V_G を消去すると，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_G \\ I_F \end{bmatrix} &= \left(U + Y' \cdot \begin{bmatrix} X_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot Y' \cdot \begin{bmatrix} E_G \\ V_F \end{bmatrix} \\ &= Y'' \cdot \begin{bmatrix} E_G \\ V_F \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

この Y'' の要素の絶対値 $|y''_{iF}| = |y''_{Fi}|$ が故障点から第 i 発電機までのアドミタンス距離である。なお，この値は通常の距離とは逆に，値が大きいほど電氣的に近接していると解釈される。

付録 I 端子条件に関する方程式の誘導

第 6.2 図に示す送電系統は、各相 (a, b, c 相) の変数によって次のように表わされる。

$$i_{Ca} = C_t P v_a \quad (I.1)$$

ただし, $i_{Ca} = [i_{Ca} \ i_{Cb} \ i_{Cc}]'$ (以下同様)

$$i_{Ga} = G_t v_a \quad (I.2)$$

$$L_t P i_{La} = v_a \quad (I.3)$$

$$C_e P (v_a - v'_a) = i_{ea} \quad (I.4)$$

$$v'_a - e_a = (R_e + L_e P) i_{ea} \quad (I.5)$$

$$i_a = i_{Ca} + i_{Ga} + i_{La} + i_{ea} \quad (I.6)$$

パークの変換を適用して

$$i_{Cd} = C_t P(\theta) P[P^{-1}(\theta) v_d] \quad (I.7)$$

$$i_{Gd} = G_t v_d \quad (I.8)$$

$$L_t P(\theta) P[P^{-1}(\theta) i_{Ld}] = v_d \quad (I.9)$$

$$C_e P(\theta) P[P^{-1}(\theta) (v_d - v'_d)] = i_{ed} \quad (I.10)$$

$$v'_d - P(\theta) P^{-1}(\theta) e_d = R_e i_{ed} + L_e P(\theta) P[P^{-1}(\theta) i_{ed}] \quad (I.11)$$

$$i_d = i_{Cd} + i_{Gd} + i_{Ld} + i_{ed} \quad (I.12)$$

ここに $\theta = \omega_0 t$

送電線の過渡現象は減衰が速いので無視し、又零相分を省略すると、上の方程式は次のように書き直される。

$$i_{Cd} = -\omega C_t E v_d \quad (I.13)$$

$$i_{Gd} = G_t v_d \quad (I.14)$$

$$-\omega L_t E i_{Ld} = v_d \quad (I.15)$$

$$-\omega C_e E (v_d - v'_d) = i_{ed} \quad (I.16)$$

$$v'_d - T(\delta) e_d = R_e i_{ed} - \omega L_e E i_{ed} \quad (I.17)$$

$$i_d = i_{Cd} + i_{Gd} + i_{Ld} + i_{ed} \quad (I.18)$$

ここにすべてのベクトルは二次であり、 $T(\delta)$ は次のように定義している。

$$T(\delta) = \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix}$$

(I. 13) ～ (I. 18) 式を線形化すると (6. 23) 式が得られる。

付録 J じょう乱時の動作に対する変分方程式の誘導

まず，(6.3)～(6.12)式を次のように書きなおす。

$$p\phi_{fd} = \omega_0 [r_{fd} E_{fd}/x_{ad} + r_{fd} (\phi_{ad} - \phi_{fd})/x_{fl}] \quad (J. 1)$$

$$p\phi_d = \omega_0 [v_d + \phi_q \omega/\omega_0 + r(\phi_{ad} - \phi_d)/x_{al}] \quad (J. 2)$$

$$p\phi_{kd} = \omega_0 r_{kd} (\phi_{ad} - \phi_{kd})/x_{kdl} \quad (J. 3)$$

$$p\phi_q = \omega_0 [v_q - \phi_d \omega/\omega_0 + r(\phi_{aq} - \phi_q)/x_{al}] \quad (J. 4)$$

$$p\phi_{kq} = \omega_0 r_{kq} (\phi_{aq} - \phi_{kq})/x_{kql} \quad (J. 5)$$

$$i_d = (\phi_{ad} - \phi_d)/x_{al} \quad (J. 6)$$

$$i_q = (\phi_{aq} - \phi_q)/x_{al} \quad (J. 7)$$

ここに，

$$\phi_{ad} = (\phi_d/x_{al} + \phi_{fd}/x_{fl} + \phi_{kd}/x_{kdl})/K_1 \quad (J. 8)$$

$$\phi_{aq} = (\phi_q/x_{al} + \phi_{kq}/x_{kql})/K_2 \quad (J. 9)$$

$$K_1 = 1/x_{ad} + 1/x_{fl} + 1/x_{al} + 1/x_{kdl} \quad (J. 10)$$

$$K_2 = 1/x_{aq} + 1/x_{al} + 1/x_{kql} \quad (J. 11)$$

次に上式より変分方程式を作ると，係数行列 A_1, A_2, A_3 は次のようになる。(空欄は零を示す)

A₁

	$\Delta \phi_{fd}$	$\Delta \phi_d$	$\Delta \phi_{kd}$	$\Delta \phi_q$	$\Delta \phi_{kq}$	$\Delta \omega$	$\Delta \delta$	Δe_{fd}	Δv_s	ΔT_a	ΔT
$P \Delta \phi_{fd}$	$-\frac{r_{fd}}{x_{fl}}$							$\frac{r_{fd}}{x_{ad}}$			
$P \Delta \phi_d$		$-\frac{r}{x_{al}}$		1.0		ϕ_{q0}					
$P \Delta \phi_{kd}$			$-\frac{r_{kd}}{x_{kdl}}$								
$P \Delta \phi_q$		-1.0		$-\frac{r}{x_{al}}$		$-\phi_{d0}$					
$P \Delta \phi_{kq}$					$-\frac{r_{kq}}{x_{kql}}$						
$P \Delta \omega$		$-\frac{i_{q0}}{M}$		$\frac{i_{d0}}{M}$							$\frac{1}{M}$
$P \Delta \delta$						1.0					
$P \Delta e_{fd}$								$-\frac{1}{T_f}$	$\frac{K_f}{T_f}$		
$P \Delta v_s$								$-\frac{K_s}{T_s T_f}$	$-\frac{1}{T_s} - \frac{K_s K_f}{T_s T_f}$		
$P \Delta T_a$						$-\frac{K_g}{T_g T_h}$				$-\frac{1}{T_g} - \frac{1}{T_h}$	$-\frac{1}{T_g T_h}$
$P \Delta T$										1.0	

A₂

	$\Delta \phi_{ad}$	$\Delta \phi_{aq}$	Δi_d	Δi_q	Δv_d	Δv_q
$P \Delta \phi_{fd}$	$\frac{r_{fd}}{x_{fl}}$					
$P \Delta \phi_d$	$\frac{r}{x_{al}}$				1.0	
$P \Delta \phi_{kd}$	$\frac{r_{kd}}{x_{kdl}}$					
$P \Delta \phi_q$		$\frac{r}{x_{al}}$				1.0
$P \Delta \phi_{kq}$		$\frac{r_{kq}}{x_{kql}}$				
$P \Delta \omega$			$\frac{\phi_{q0}}{M}$	$-\frac{\phi_{d0}}{M}$		
$P \Delta \delta$						
$P \Delta e_{fd}$					$-\frac{K_f v_{d0}}{T_f v_{t0}}$	$-\frac{K_f v_{q0}}{T_f v_{t0}}$
$P \Delta v_s$					$-\frac{K_s K_f v_{d0}}{T_s T_f v_{t0}}$	$-\frac{K_s K_f v_{q0}}{T_s T_f v_{t0}}$
$P \Delta T_a$						
$P \Delta T$						

A_3

	$\Delta \phi_{fd}$	$\Delta \phi_d$	$\Delta \phi_{kd}$	$\Delta \phi_q$	$\Delta \phi_{kq}$	$\Delta \omega$	$\Delta \delta$	Δe_{fd}	Δv_s	ΔT_a	ΔT
$\Delta \phi_{ad}$	$\frac{1}{K_1 x_{fl}}$	$\frac{1}{K_1 x_{al}}$	$\frac{1}{K_1 x_{kdl}}$								
$\Delta \phi_{aq}$				$\frac{1}{K_2 x_{al}}$	$\frac{1}{K_2 x_{kql}}$						
Δi_d	$\frac{1}{x_{al}}(\Delta \phi_{ad} - \Delta \phi_d)$										
Δi_q				$\frac{1}{x_{al}}(\Delta \phi_{aq} - \Delta \phi_q)$							
Δv_d	$(D_t + D_e^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} \Delta i_d \\ \Delta i_q \end{pmatrix}$					b_1	b_2				
Δv_q											

$$\mathbf{b}_1 = (D_t + D_e^{-1})^{-1} (a_t E \mathbf{v}_{d0} - a_e D_e^{-1} E \mathbf{i}_{edo})$$

$$\mathbf{b}_2 = (D_t + D_e^{-1})^{-1} D_e^{-1} T \mathbf{e}_{do}$$

参考文献

- (1) Williams, H.F., Louie, S.A. and Bills, G.W., "Feasibility of Liapunov functions for the stability analysis of electric power systems having up to 60 generators," IEEE Vol.PAS-91, No.3, 1972, pp.1145-1157.
- (2) Pai, M.A. and Murthy, P.G., "New Lyapunov functions for power systems based on minimal realizations," Int. J. Control, Vol.19, No.2, 1974, pp.401-415.
- (3) Rao, N.D., "Routh-Hurwitz conditions and Lyapunov methods for the transient-stability problem," Proc. IEE, Vol. 116, No.4, 1969, pp.539-547.
- (4) Systems Control, Inc., "Coherency-based dynamic equivalents for transient stability studies," Final Report on EPRI Project RP90-4, Phase II, 1975.
- (5) 上村, 松木, "電力系統の不安定平衡点の一算出法について", 電気学会論文誌B, 92巻7号, 昭和47年, 399-405頁.
- (6) Kakimoto, N., Ohsawa, Y. and Hayashi, M., "Transient stability analysis of electric power system via Lur'e type Lyapunov function, Part I," Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University, Vol.39, Part 4, 1977, pp. 566-587.
- (7) 上村他, "電力系統のエネルギー積分関数の近似について", 電気学会論文誌B, 92巻12号, 昭和47年, 627-630頁.
- (8) Hayashi, M. and Ohsawa, Y., "Transient stability region of power systems using series expansion of Lyapunov function," Int. J. Control, Vol.29, No.6, 1979, pp. 1059-1066.
- (9) Yao-Nan Yu and Vongsuriya, K., "Nonlinear power system stability study by Liapunov function and Zubov's method," IEEE Vol. PAS-86, No.12, 1967, pp. 1480-1485.
- (10) De Sarkar, A.K. and Rao, N.D., "Zubov's method and transient-stability problems of power systems," Proc. IEE, Vol. 113, No.8, 1971, pp.1035-1040.
- (11) Margolis, G.S. and Vogt, W.G., "Control engineering applications of V.I. Zubov's construction procedure for Lyapunov functions," IEEE Vol. AC-8, 1963, pp. 104-113.
- (12) 佐々木, 玄道, 菊地, "Zubov法によるリアプノフ関数構成プログラムについて", 昭和51年電気学会全国大会講演論文集, No.878, 1141頁.
- (13) Ohsawa, Y., "Transient stability region of power systems using series expansion of Lyapunov function," Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University, Vol.39, Part 3, 1977, pp.335-344.
- (14) Ohsawa, Y. and Hayashi, M., "Assessment of transient stability via stochastic approach and its application to optimum load dispatching problem in power systems," Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University, Vol.37, Part 4, 1975, pp.237-251.
- (15) Pang, C.K. et. al., "Security evaluation in power system using pattern recognition," IEEE

Vol. PAS-93, No.2, 1974, pp.969-976.

- (16) DyLiacco, T.E., "Control of power systems via the multi-level concept," Ph.D. Thesis, Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio, 1968.
- (17) Teichgraeber, R.D., Harris, F.W. and Johnson, G.L., "New stability measure for multimachine power systems," IEEE Vol. PAS-89, No.2, 1970, pp.233-239.
- (18) El-Abiad, A.H. and Nagappan, K., "Transient stability region of multimachine power systems," IEEE Vol. PAS-85, No.2, 1966, pp.169-179.
- (19) 長谷川, 小池, "新しい観点にたった電力系統の最適負荷配分問題", 電気学会論文誌B, 94巻5号, 昭和49年, 241-247頁.
- (20) Sasson, A.M., "Combined use of the Powell and Fletcher-Powell nonlinear programming methods for optimal load flows," IEEE Vol. PAS-88, No.10, 1969, pp.1530-1537.
- (21) Ohsawa, Y. and Hayashi, M., "Coherency recognition for transient stability equivalents using Lyapunov function," Proc. of the 6th PSCC, Vol.2, 1978.
- (22) 大沢, 林, 梶島, "リアプノフ関数にもとづく過渡安定度等価簡略化法", 電気学会情報処理研究会資料IP-79-13(昭和54年)
- (23) Ohsawa, Y. and Hayashi, M., "Construction of power system transient stability equivalents using the Lyapunov function," Int. J. Electronics, Vol.50, No.4, 1981, pp.273-288.
- (24) Brown, W.T. and Cloues, W.J., "Combination load-flow and stability equivalent for power system representation on a-c network analyzers," AIEE Trans., 1955, pp.782-787.
- (25) Chang, A. and Adibi, M.M., "Power system dynamic equivalents," IEEE Vol. PAS-59, 1970, pp.1737-1744.
- (26) Undrill, J.M. and Turner, A.E., "Construction of power system electromechanical equivalents by modal analysis," IEEE Vol. PAS-90, 1971, pp.2049-2059.
- (27) Lee, S.T.Y. and Schweppe, F.C., "Distance measures and coherency recognition for transient stability equivalents," IEEE Vol. PAS-92, 1973, pp.1550-1557.
- (28) 林, 庵原, 大沢, "一機無限大母線系の動態安定度の測度", 電気学会雑誌, 90巻11号, 昭和45年, 2288-2297頁.
- (29) Shackshaft, G., "General-purpose turbo-alternator model," Proc. IEE, Vol.110, No.4, 1963, pp.703-713.
- (30) 古田: 「線形システム制御理論」165頁, 昭晃堂(昭和48年).
- (31) Undrill, J.M., "Power systems stability studies by the method of Lyapunov: II - the interconnection of hydro generating sets," IEEE Vol. PAS-86, No.7, 1967, pp.802-811.
- (32) Ohsawa, Y. and Hayashi, M., "Relative dynamic stability of a one-machine system," Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University, Vol.33. Part4, 1971, pp.307-328.
- (33) Kalman, R.E. and Bertram, J.E., "Control system analysis and design via the "Second

- method” of Lyapunov-I Continuous-time systems,” Trans. ASME, Ser.D, Vol.82, 1960, pp. 371-393.
- (34) Elmetwally, M.M. and Rao, N.D., “Sensitivity analysis in power system dynamic stability studies,” IEEE Vol. PAS-91, 1972, pp. 1692-1699.
- (35) 関根：「電力系統解析理論」電気書院，昭和 46 年（1971）.
- (36) La Salle, J. and Lefchetz, S., “Stability by Liapunov’s direct method with applications,” New York, Academic Press, 1961. (book)
- (37) 藤井，正司，“Popov の安定判別の適用方法について — Popov 軌跡の一般的性質 —”，計測と制御，5 巻 10 号，昭和 41 年，709-717 頁.
- (38) Moore, J.B. and Anderson, B.D.O., “A generalization of the Popov criterion,” J. Franklin Inst., Vol. 285, 1968, pp. 488-492.
- (39) Anderson, B.D.O., “A system theory criterion for positive real matrices,” SIAM J., Vol.5, 1967, pp. 171-182.
- (40) Sastry, V.R. and Murthy, P.G., “Derivation of completely controllable and completely observable state models for multimachine power system stability studies,” Int.J. Control, Vol.16, No.4, 1972, pp. 777-788.
- (41) Sastry, V.R. and Murthy, P.G., Correspondence to “Optimum Lyapunov functions and stability regions for multimachine power systems,” Proc. IEE, Vol.119, No.5, 1972, pp. 603-604.
- (42) Calvaer, A., Horward, J.L. and Ribbens-Pavella, M., “Relative transient stability power systems margin index,” IEEE PES Summer Meeting, 1973, pp.15-20.
- (43) 電気学会技術報告，Ⅱ 部 19 号，電力系統の信頼度制御 昭和 47 年 10 月.
- (44) 斎藤，小泉，“大電力系統におけるセキュリティ自動監視システムの開発”，電気学会論文誌 B，95 巻 2 号，昭和 50 年，128-131 頁.

